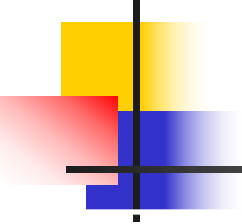


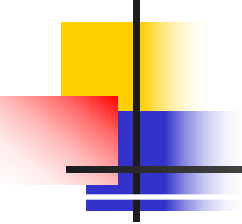
学习情境 五

力系的合成与平衡分析



能力目标

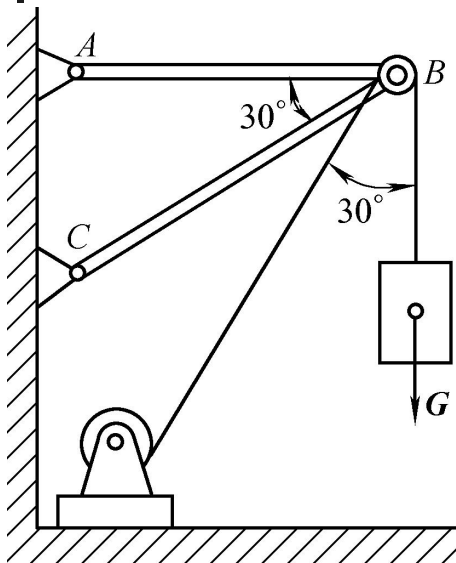
- 能够分析解决工程构件在力系作用下的合成与平衡问题。
- 能够运用力学知识分析工程中的力学现象。



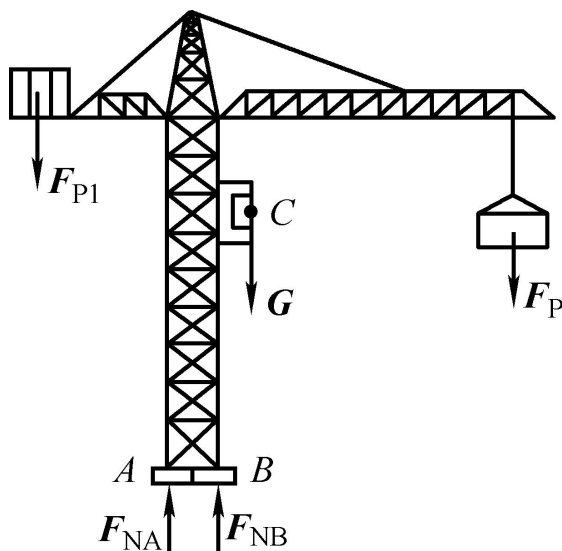
学习内容

- ◆ 5.1 平面汇交力系的合成与平衡分析
- ◆ 5.2 力对点之矩及合力矩定理的应用
- ◆ 5.3 力偶及平面力偶系的合成与平衡分析
- ◆ 5.4 平面任意力系的简化与平衡分析
- ◆ 5.5 物体系统的平衡分析
- ◆ 5.6 考虑摩擦时的平衡问题分析
- ◆ 5.7 空间力系的合成与平衡分析

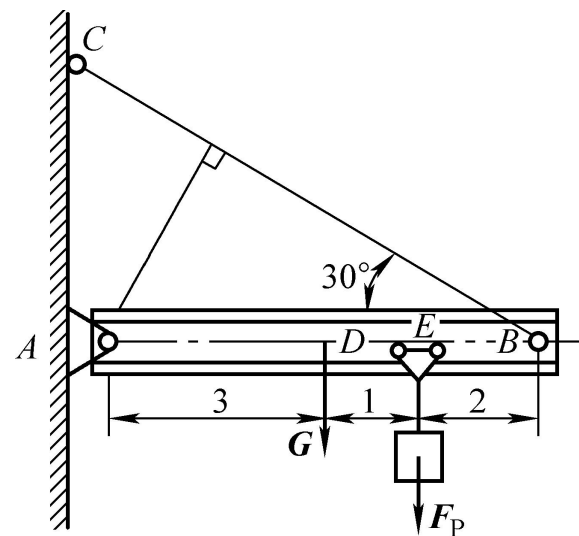
案例导入



简易起重机



塔吊



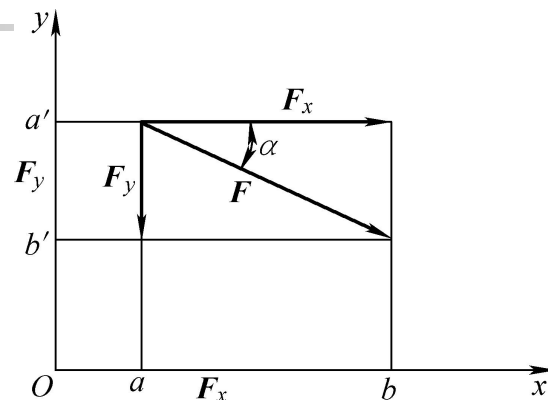
悬臂吊车

5.1 平面汇交力系的合成与平衡分析

一、力在平面直角坐标轴上的投影

F 在 x 、 y 轴上的投影，记作 F_x 、 F_y 。

投影是代数量，其负号规定为：若力起点的投影到终点的投影指向与坐标轴的指向一致，则力投影为正，反之为负。



若已知 F 的大小及其与 x 轴所夹的锐角 α ，则有

$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = -F \sin \alpha \end{cases}$$

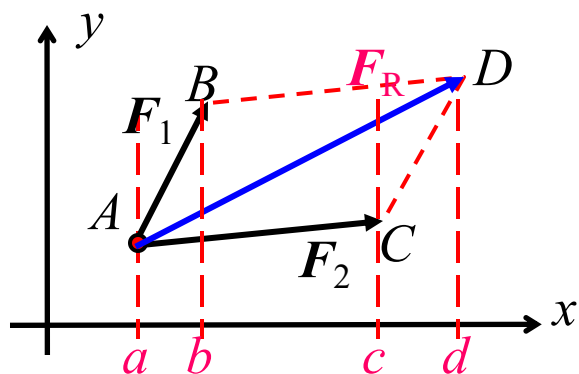
如将 F 沿坐标轴方向分解，所得分力 F_x 、 F_y 值与在同轴上的投影 F_x 、 F_y 相等。

注意:力在轴上的投影是代数量，而分力是矢量，不可混为一谈。

如果已知力的投影 F_x 、 F_y ，可求出 F 的大小和方向，即

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan \alpha = |F_y / F_x| \end{cases}$$

二、合力投影定理



合力 F_R 在 x 轴上的投影 F_{Rx} 和分力 F_1, F_2 在 x 轴的投影分别为 $F_{Rx}=ad$; $F_{1x}=ab$, $F_{2x}=ac$ 。

$$F_{Rx}=ad=ab+bd=ab+ac=F_{1x}+F_{2x}$$

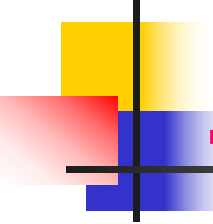
同理

$$F_{Ry}=F_{1y}+F_{2y}$$

若 n 个力作用的力系，则

$$F_{Rx}=\Sigma F_x \quad F_{Ry}=\Sigma F_y$$

结论：合力在某一轴上的投影等于力系中各分力在同一轴上投影的代数和。此即为合力投影定理。



三、平面汇交力系的合成

平面汇交力系总可以合成为一个合力 F_R ，其合力在坐标轴上的投影： $F_{Rx}=\Sigma F_x$ ， $F_{Ry}=\Sigma F_y$ 则：

$$\begin{cases} F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ \tan \alpha = \left| \sum F_y / \sum F_x \right| \end{cases}$$

【例5-1】 一吊环受到三条钢丝绳的拉力 F_1 、 F_2 、 F_3 ，如图5-6所示。已知 $F_1 = 2\text{kN}$ ， $F_2 = 2.5\text{kN}$ ， $F_3 = 2.5\text{kN}$ ，试求该吊环所受合力的大小和方向。

解： 建立直角坐标系 Oxy ，可得

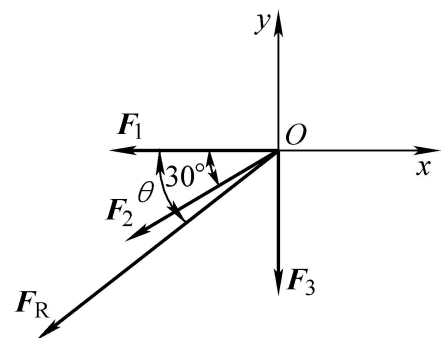
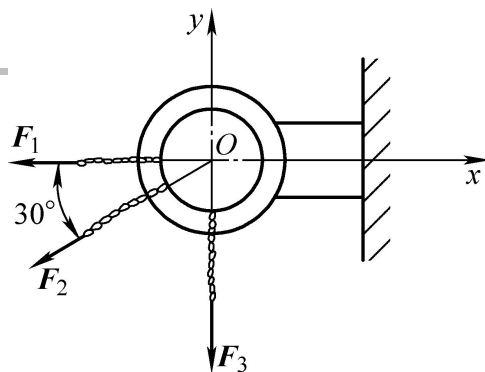
$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ &= -F_1 - F_2 \cos 30^\circ + 0 \\ &= -2\text{kN} - 2.17\text{kN} + 0 = -4.17\text{kN} \end{aligned}$$

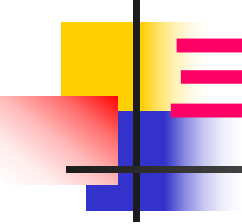
$$\begin{aligned} F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \\ &= 0 - F_2 \sin 30^\circ - F_3 \\ &= 0 - 1.25\text{kN} - 1.5\text{kN} = -2.75\text{ kN} \end{aligned}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(-4.17\text{kN})^2 + (-2.75\text{kN})^2} = 4.99\text{kN}$$

$$\theta = \arctan \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right| = \arctan \left| \frac{-2.75}{-4.17} \right| = 33.4^\circ$$

因 F_{Rx} 、 F_{Ry} 均为负，故合力 F_R 在第四象限。





三、平面汇交力系的平衡及应用

平面汇交力系平衡的充分必要条件：

力系的合力为零。

平面汇交力系的平衡方程：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

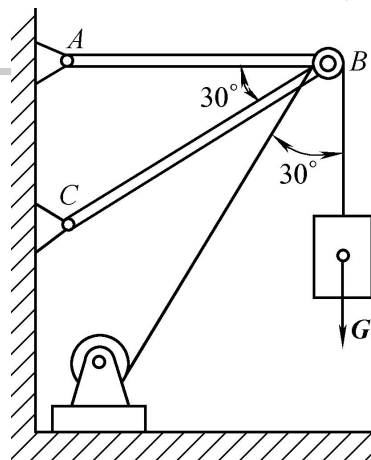
平面汇交力系有两个独立方程，可求解两个未知量。

【例5-2】 下图所示为一简易起重机，其利用绞车和绕过滑轮的绳索吊起重物，重物重量 $G = 50\text{kN}$ ，各杆件与滑轮的重力不计。滑轮B的大小可忽略不计，试求杆AB与BC所受的力。

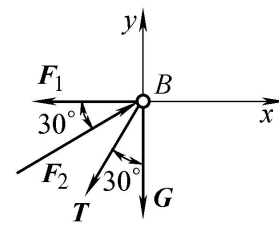
解：（1）画其受力图；

（2）选取坐标系xBy；

（3）列平衡方程，求解未知力。



a)



b)

$$\sum F_x = 0, F_2 \cos 30^\circ - F_1 - T \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_2 \sin 30^\circ - T \cos 30^\circ - G = 0 \quad (2)$$

由式（2）得 $F_2 = 186.5\text{kN}$

代入式（1）得 $F_1 = 136.5\text{kN}$

两力均为正值，说明 F_1 与 F_2 方向与图示一致，即AB杆受拉力，BC杆受压力。

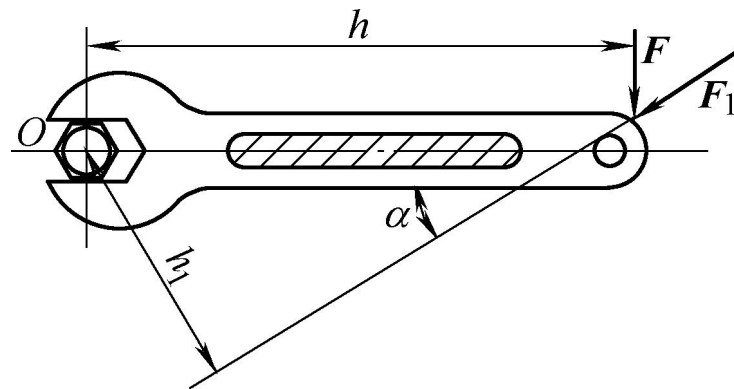
5.2 力对点之矩及合力矩定理的应用

一、力对点之矩

力使物体产生转动效应的度量称为力矩。

力对点之矩记作 $M_O(F)$, 即

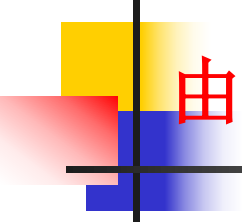
$$M_O(F) = \pm Fh$$



力对点之矩是代数量, 其正负规定为: 使物体逆时针转动, 力矩为正, 反之为负。单位是 $\text{N}\cdot\text{m}$ 或 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

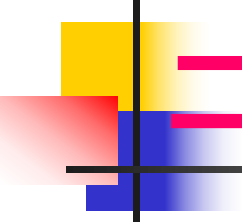
根据定义, 图中所示的力 F_1 对点 O 的矩为:

$$M_O(F_1) = -F_1 h_1 = -F_1 h \sin \alpha。$$



由力矩的定义可知：

- 力矩的大小和转向与矩心位置有关，同一力对不同矩心的力矩不同。
- 力的作用线如果通过矩心，力矩为零。
- 力沿其作用线滑动时，力对点之矩不变（因力的大小、方向未变，力臂也未变）。



二、合力矩定理

合力矩定理：平面汇交力系的合力对平面上任一点之矩，等于所有分力对同一点力矩的代数和。

$$M_0(F_R) = \sum M_0(F)$$

合力矩定理不仅适用于平面汇交力系，对于平面任意力系、空间力系同样成立。

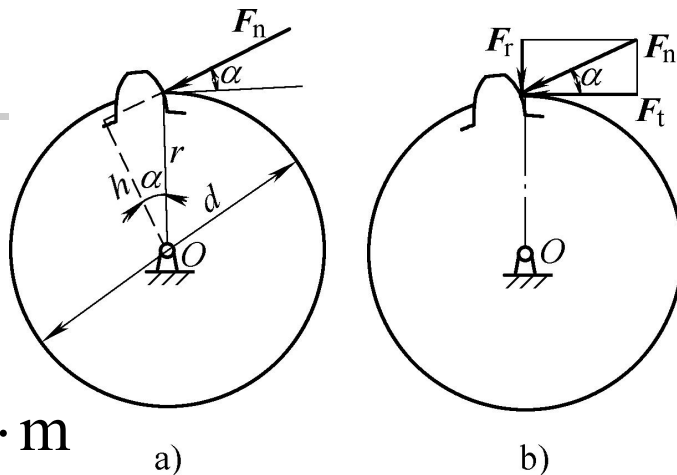
求平面力对平面某点的力矩，一般采用以下两种方法：

1) 用力和力臂的乘积求力矩； 2) 用合力矩定理求力矩。

【例5-3】 下图所示圆柱直齿轮的齿面受一啮合角 $\alpha = 20^\circ$ 的法向压力 $F_n = 0.5 \text{ kN}$ 的作用，齿面分度圆直径 $d = 120 \text{ mm}$ 。试计算力对轴心 O 的力矩。

解法1： 按力对点之矩的定义，有

$$M_O(F_n) = F_n h = F_n d \cos \alpha / 2 = 28.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

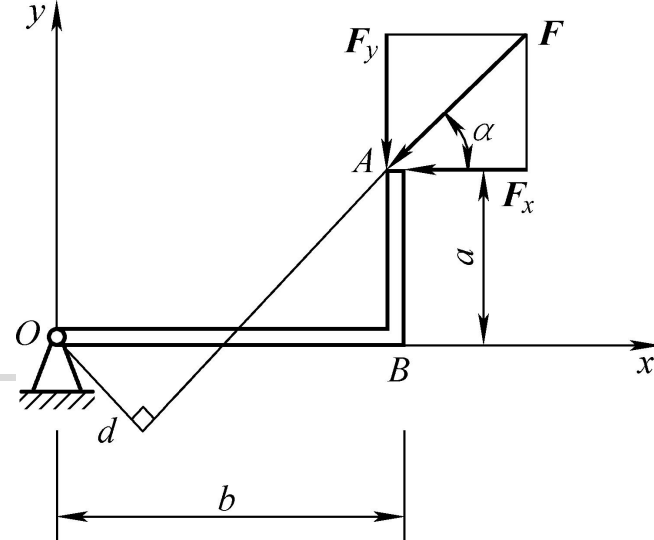


解法2： 按合力矩定理

将 F_n 沿半径方向分解成一组正交的圆周力 $F_t = F_n \cos \alpha$ 与径向力 $F_r = F_n \sin \alpha$ ，如图b。

$$\begin{aligned} \text{有： } M_O(F_R) &= M_O(F_r) + M_O(F_t) \\ &= F_t r + 0 \\ &= F_n \cos \alpha \cdot r = 28.2 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

【例5-4】 如图所示，在 ABO 弯杆上 A 点作用一力 F ，已知 $a = 180\text{mm}$ ， $b = 400\text{mm}$ ， $\alpha = 60^\circ$ ， $F = 200\text{N}$ 。求力 F 对 O 点之矩。



解： 由于力 F 对矩心 O 的力臂不易求出，故将 F 在 A 点分解为正交的 F_x 、 F_y ，再应用合力矩定理，有

$$M_O(F) = M_O(F_x) + M_O(F_y)$$

$$F_x = F \cos \alpha = 200\text{N} \times \cos 60^\circ = 100\text{N}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 200\text{N} \times \sin 60^\circ = 173.2\text{N}$$

$$M_O(F_x) = F_x a = 100\text{N} \times 0.18\text{m} = 18\text{N}\cdot\text{m}$$

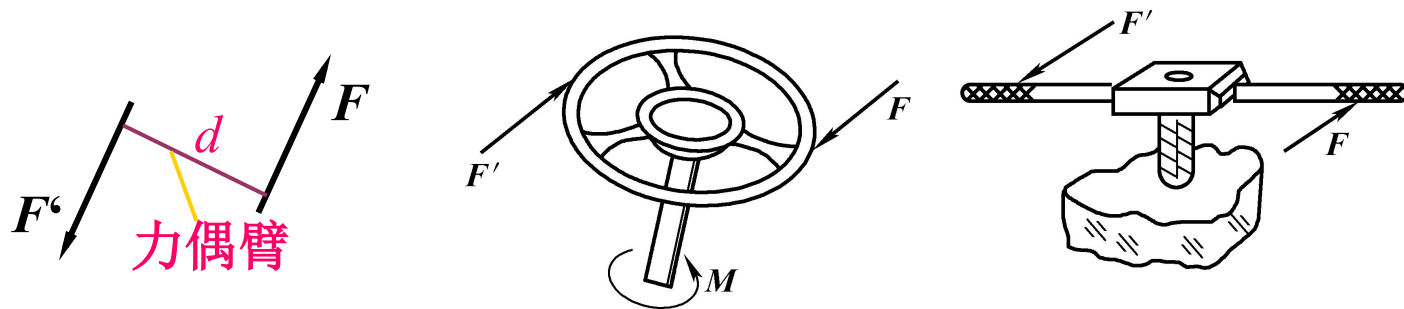
$$M_O(F_y) = -F_y b = 173.2\text{N} \times 0.4\text{m} = -69.2\text{N}\cdot\text{m}$$

$$\text{所以 } M_O(F) = 18\text{N}\cdot\text{m} - 69.2\text{N}\cdot\text{m} = -51.2\text{N}\cdot\text{m}$$

5.3 力偶及平面力偶系的合成与平衡分析

一、力偶的概念

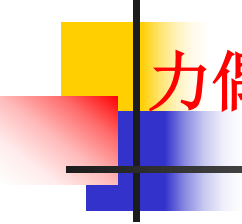
一对大小相等、方向相反、作用线平行的两个力称为力偶。



力偶对物体的转动效应, 取决于力偶中的力与力偶臂的乘积, 称为力偶矩, 记作 $M(F, F')$ 或 M , 即

$$M(F, F') = M = \pm Fd$$

力偶矩和力矩一样是代数量。其正负号表示力偶的转向, 通常规定, 力偶逆时针转向时, 力偶矩为正, 反之为负。



力偶对物体的作用效果取决于三个要素：

力偶矩的大小；

力偶在平面内的转向；

力偶作用面的方位。

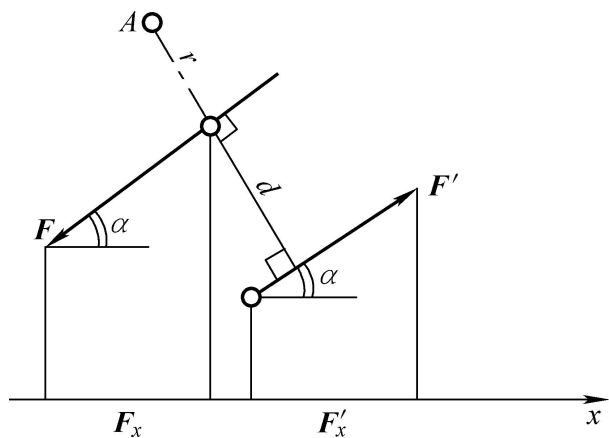
二、力偶的性质

性质1：力偶在任意坐标轴上的投影零。

$$\sum F_x = -F \cos \alpha + F' \cos \alpha = 0$$

故力偶无合力，力偶不能与一个力等效，
力偶只能用力偶来平衡。

力和力偶是力系的两个基本元素。



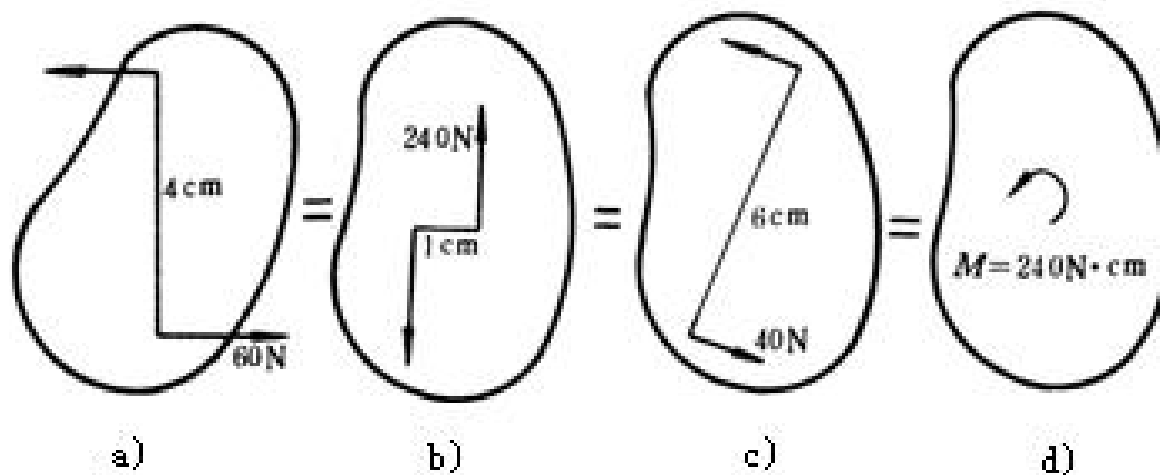
性质2：力偶对其作用平面内任一点的力矩, 恒等于其力偶矩, 而与矩心的位置无关。

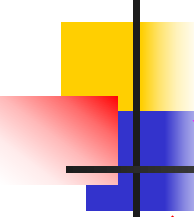
$$M_A (F) + M_A (F') = F' (d + r) - Fr = Fd = M$$

性质3：凡是三要素相同的力偶，彼此等效，可以相互替代。

推论1：力偶可在其作用平面内任意搬移, 而不改变它对刚体的转动效应。

推论2：力偶在不改变力偶矩大小和转向的条件下，可以同时改变力偶中两反向平行力的大小、方向以及力偶臂的大小。而力偶的作用效应保持不变。





三、平面力偶系的合成与平衡

平面力偶系：作用在物体上同一平面内若干个力偶。

平面力偶系的合成：平面力偶系的合成结果为一合力偶，合力偶矩等于各分力偶矩的代数和。

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M$$

平面力偶系的独立平衡方程只有一个，故只能求解一个未知数。

【例5-5】一多头钻床在水平工件上钻孔，如图所示，设每个钻头作用于工件上的切削力在水平面上构成一个力偶。 $M_1 = M_2 = 13.5\text{N}\cdot\text{m}$ ， $M_3 = 17\text{N}\cdot\text{m}$ 。求工件受到的合力偶矩。如果工件在A、B两处用螺栓固定，A和B之间的距离 $l = 0.4\text{m}$ ，试求两螺栓在工件平面内所受的力。

解：（1）求三个主动力偶的合力偶矩。

$$\begin{aligned} M &= \sum M = -M_1 - M_2 - M_3 \\ &= (-13.5 - 13.5 - 17)\text{N}\cdot\text{m} = -44\text{N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

（2）求两个螺栓所受的力。

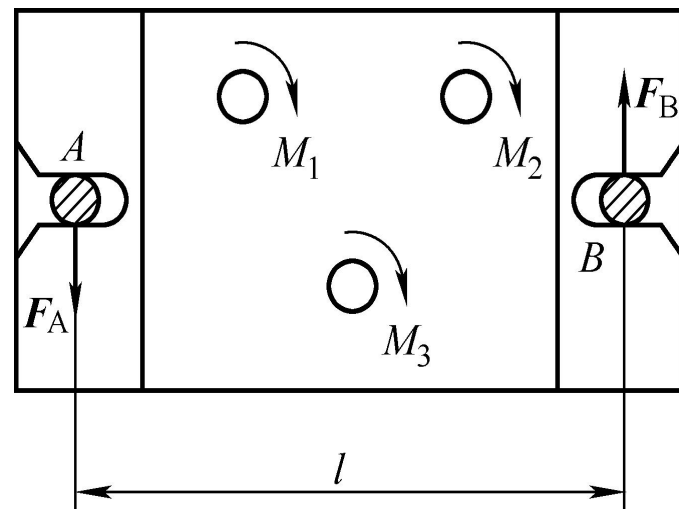
选工件为研究对象，工件受三个主动力偶作用和两个螺栓的反力作用而平衡，故两个螺栓的反力 F_A 与 F_B 必然组成为一力偶。

由平面力偶系的平衡条件有： $\sum M = 0$

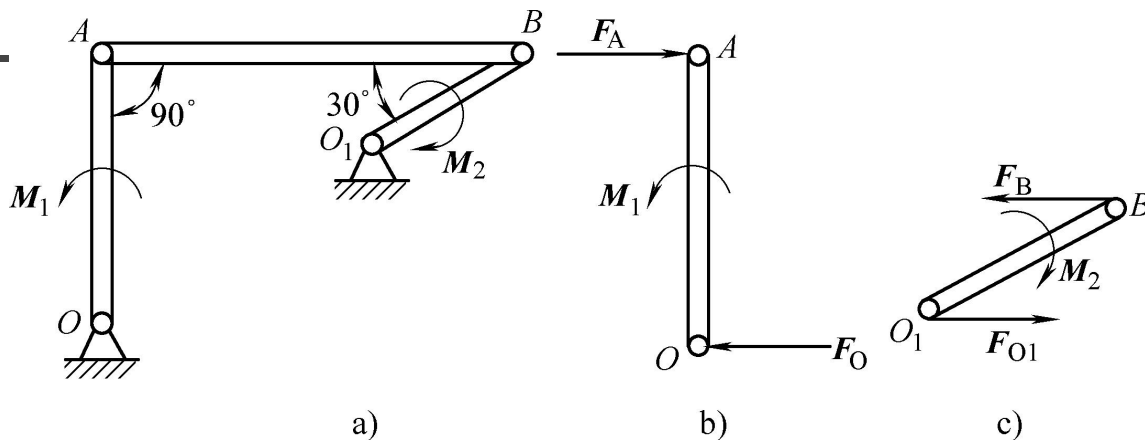
$$F_A l - M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

解得 $F_A = (M_1 + M_2 + M_3) / l = 110\text{N}$

所以 $F_A = F_B = 110\text{N}$



【例5-6】 四连杆机构在下图所示位置平衡，已知 $OA = 120\text{cm}$ ， $O_1B = 80\text{cm}$ ，作用在摇杆 OA 上的力偶矩 $M_1 = 2\text{N}\cdot\text{m}$ ，不计杆自重，求力偶矩 M_2 的大小。



解：（1）画受力图；

（2）对杆 OA 列平衡方程：

$$\sum M = 0, \quad M_1 - F_A \times OA = 0$$

$$\text{得：} F_A = \frac{M_1}{OA} = 1.67\text{N}$$

（3）对杆 O_1B 列平衡方程。

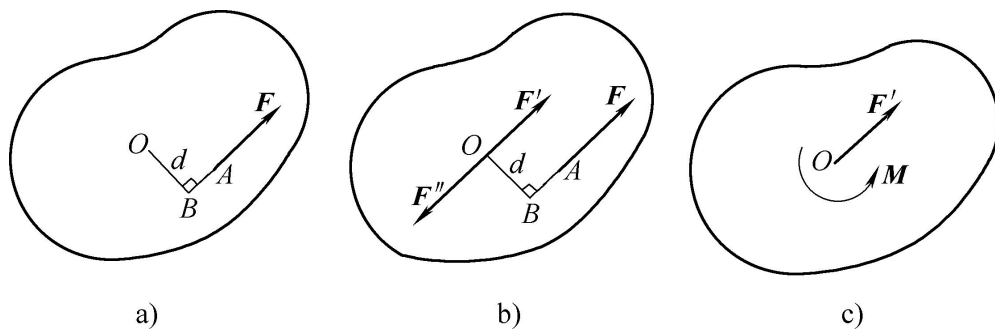
$$\sum M = 0, \quad F_B \times O_1B \sin 30^\circ - M_2 = 0$$

$$\text{因} \quad F_B = F_A = 1.67\text{N}$$

$$\text{得} \quad M_2 = F_A \times O_1B \times 0.5 = 1.67\text{N} \times 0.8\text{m} \times 0.5 = 0.66\text{N}\cdot\text{m}$$

5.4 平面任意力系的简化与平衡分析

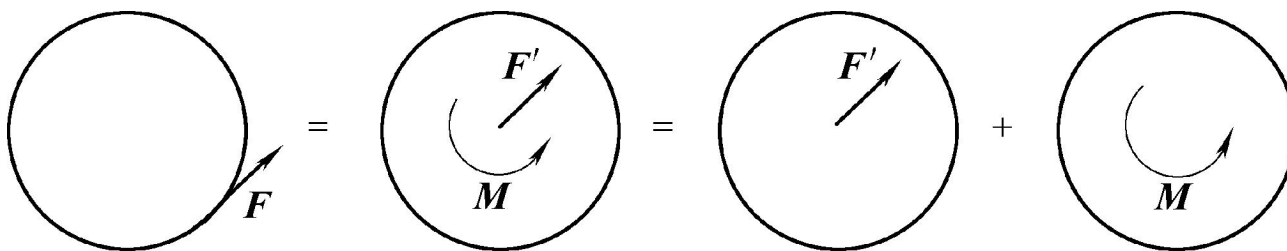
一、力线平移定理



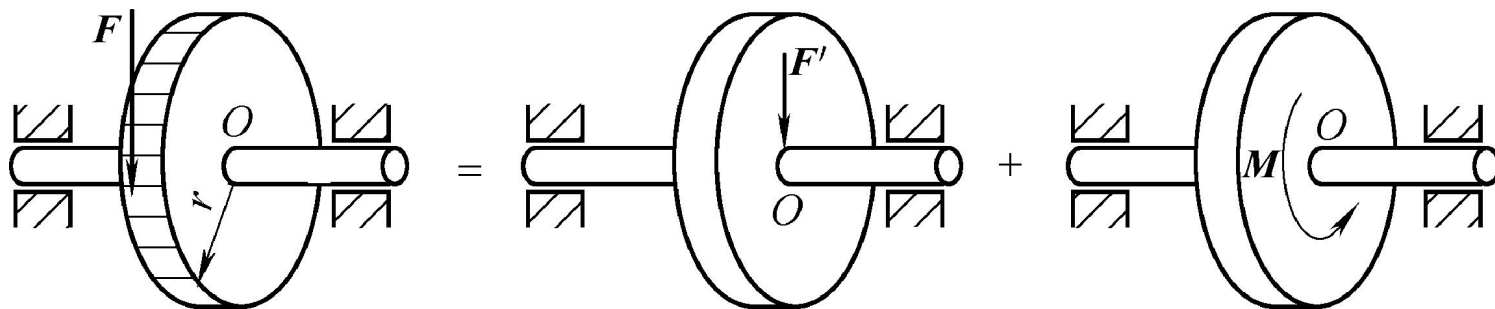
若 $F' = F'' = F$

$$M(F, F'') = Fd = M_B(F)$$

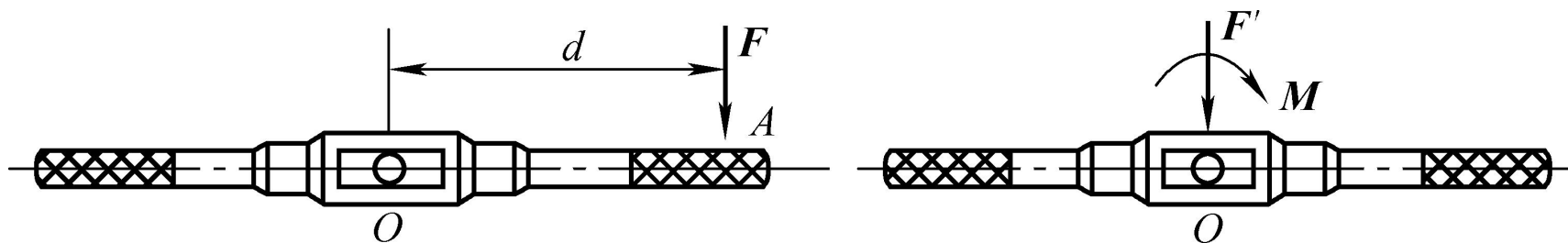
作用于刚体上的力，
可以平移到刚体上的任一点，得到一平移力和一附加力偶，其附加力偶矩等于原力对平移点的力矩，此即为力线平移定理。



削乒乓球实例



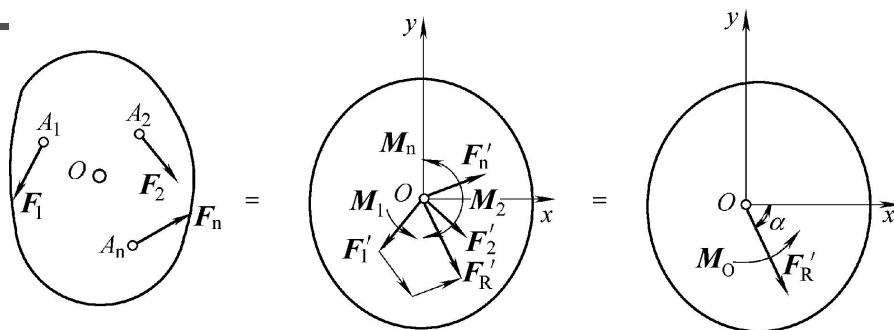
转轴上齿轮实例



攻螺纹实例

二、平面任意力系的简化

1、平面任意力系向平面内任一点简化



$$(1) \text{ . 主矢 } F'_R \quad F'_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad \alpha = \arctan \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right|$$

$$(2) \text{ . 主矩 } M_0 \quad M_0 = \sum M = \sum M_O(F)$$

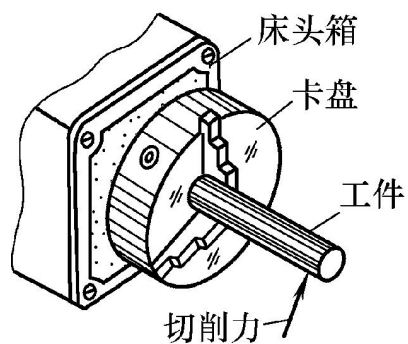
结论:

平面任意力系向平面任意点简化, 得到一主矢 F'_R 和一主矩 M_0

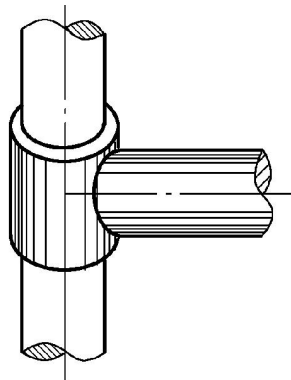
主矢的大小等于原力系中各分力在坐标轴投影代数 and 的平方和再开方, 作用在简化中心上, 其大小和方向与简化中心的选取无关。

主矩的大小等于各分力对简化中心力矩的代数和。其大小和方向与简化中心的选取有关。

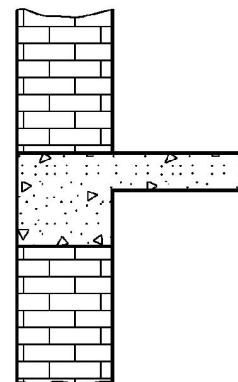
固定端约束力学问题分析



a)

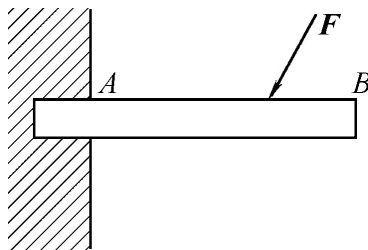


b)

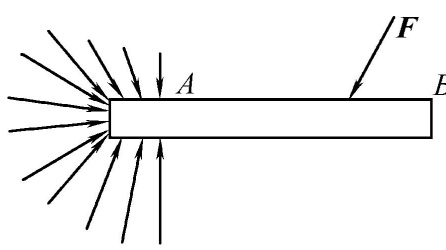


c)

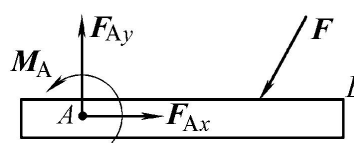
固定端约束在平面上限制了物体可能存在的三种运动，即两个垂直方向的平移运动和转动，表示如下：



a)



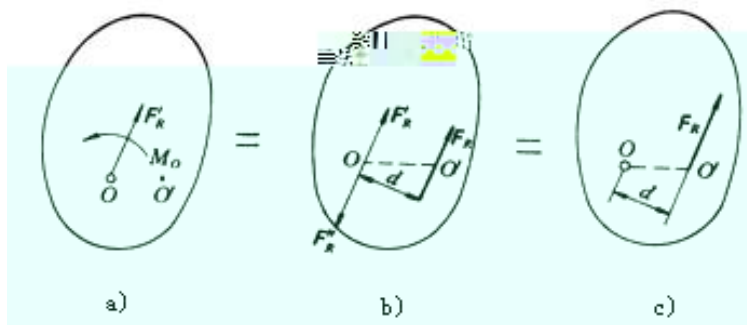
b)



c)

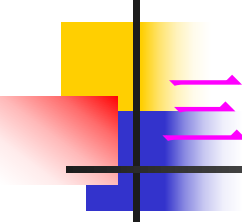
◆ 2、平面任意力系简化结果的讨论

- 1) $F_R' = 0$ $M_0 \neq 0$ 力系为一平面力偶系。在这种情况下, 主矩的大小与简化中心的选择无关。
- 2) $F_R' \neq 0$ $M_0 = 0$ 主矢 F_R' 就是力系的合力 F_R 。
- 3) $F_R' \neq 0$ $M_0 \neq 0$ 主矢 F_R' 和主矩 M_0 也可以合成为一个合力 F_R 。



$$d = \left| \frac{M_O}{F_R} \right| = \left| \frac{M_O}{F_R'} \right|$$

- 4) $F_R' = 0$ $M_0 = 0$ 力系处于平衡状态。



三、平面任意力系的平衡方程及其应用

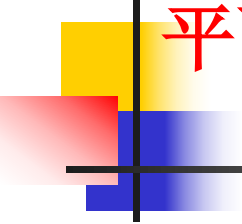
1. 平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的充分必要条件是：

$$\begin{cases} F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 0 \\ M_O = \sum M_O(F) = 0 \end{cases}$$

故得平面任意力系的平衡方程为：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(F) = 0 \end{cases}$$



平面任意力系的平衡方程还有以下两种形式：

二矩式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \end{cases}$$

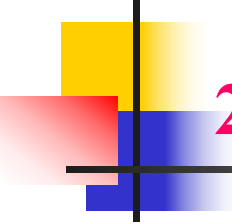
附加条件：*AB*连线不得与*x*轴相垂直。

三矩式

$$\begin{cases} \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \\ \sum M_C(F) = 0 \end{cases}$$

附加条件：*A*、*B*、*C*三点不在同一直线上。

平面任意力系只能列三个独立的平衡方程，最多只能解三个未知量。



2. 平面任意力系平衡问题的解题步骤

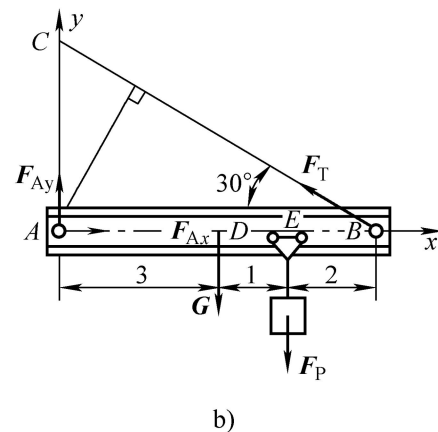
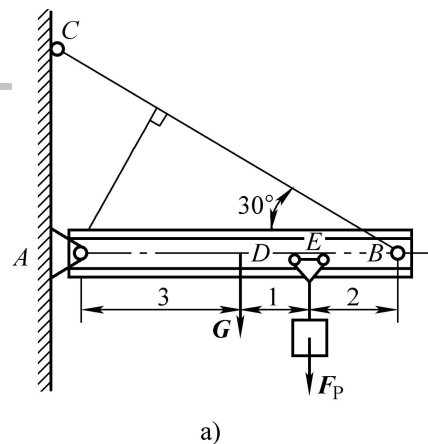
- 选取研究对象，画出其受力图。
- 建立直角坐标系。应尽可能使坐标轴与未知力平行(重合)或垂直：尽可能将矩心选在两个未知力的交点。
- 列平衡方程，求解未知量。

【例5-8】 如图所示简易起重机的水平梁 AB ， A 端以铰链固定， B 端用拉杆 BC 拉住。水平梁 AB 自重 $G = 4\text{kN}$ ，载荷 $F_P = 10\text{kN}$ ，尺寸单位为 m ， BC 杆自重不计，求拉杆 BC 所受的拉力和铰链 A 的约束反力。

解：（1）选取梁 AB （含重物）为研究对象，画出受力图，如图b所示。

（2）选取坐标系 Axy 。

（3）各个力向 x ， y 轴投影，并对 A 点取力矩建立平衡方程。



$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_T \cos 30^\circ = 0$$

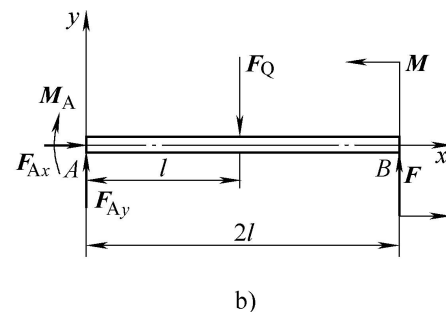
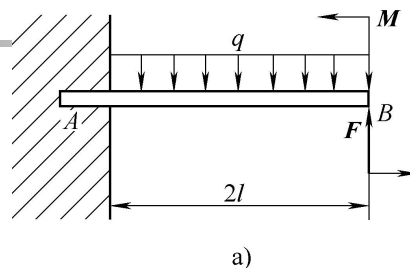
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_T \sin 30^\circ - G - F_P = 0$$

$$\sum M_A (F) = 0, \quad F_T \sin 30^\circ \times 6 - G \times 3 - F_P \times 4 = 0$$

故解得： $F_T = 17.3\text{kN}$, $F_{Ax} = 15\text{kN}$, $F_{Ay} = 5.34\text{kN}$

【例5-9】悬臂梁如图所示，梁上作用有均布载荷 q ，在 B 端作用有集中力 $F = ql$ 和力偶为 $M = ql^2$ ，梁长度为 $2l$ ，求固定端 A 的约束反力。

解：（1）取 AB 梁为研究对象，画受力图（见图b），均布载荷 q 可简化为作用于梁中点的一个集中力 $F_Q = q \times 2l$ 。



（2）列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A (F) = 0, \quad M - M_A + F \times 2l - F_Q l = 0,$$

故
$$M_A = M + 2Fl - F_Q l = ql^2 + 2ql^2 - 2ql^2 = ql^2$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F - F_Q = 0$$

故
$$F_{Ay} = F_Q - F = 2ql - ql = ql$$

【例5-10】 塔吊如图所示，机身重 $G = 100\text{kN}$ ，其重心 C 与右轨 B 的距离为 $b = 0.6\text{m}$ ；最大起重量 $F_P = 36\text{kN}$ ，与右轨 B 的距离为 $l = 10\text{m}$ ；塔吊上平衡铁重 F_{P1} ，其重心 O 与左轨 A 的距离为 $e = 4\text{m}$ ；轨距 $a = 3\text{m}$ 。欲使塔吊满载时不向右倾覆，空载时不向左倾覆，求相应的平衡重 F_{P1} 值的大小。

解：（1）取整个塔吊为研究对象，画受力图如图b所示。

（2）满载时（ $F_P = 36\text{kN}$ ）塔吊处于将要向右倾覆而又未倾覆的临界状态，此时， $F_{P1} = F_{P1\min}$ ， $F_{NA} = 0$ ，选 B 点为矩心，如图c所示。空载时（ $F_P = 0$ ）塔吊处于将要向左倾覆而又未倾覆的临界状态，此时， $F_{P1} = F_{P1\max}$ ， $F_{NB} = 0$ ，选 A 点为矩心，如图d所示。

（3）分别以 A 、 B 为矩心建立平衡方程求解。

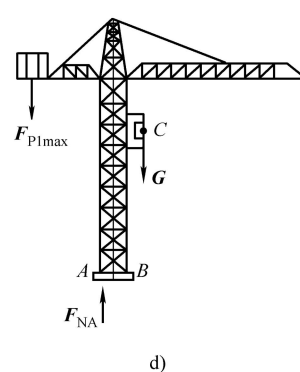
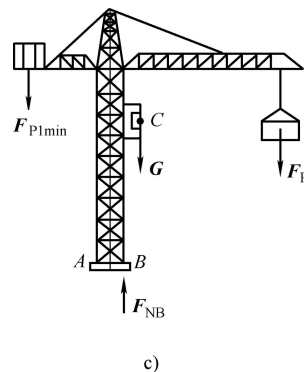
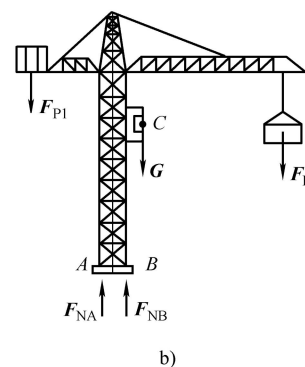
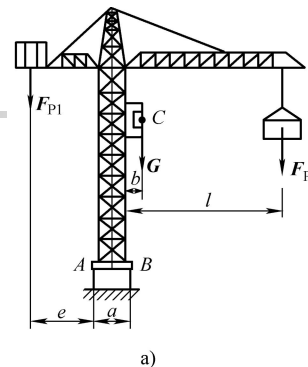
空载时 $\sum M_A (F) = 0$ ， $F_{P1\max} \times e - G \times (a + b) = 0$

$$\text{得 } F_{P1\max} = \frac{G \times (a + b)}{e} = \frac{100 \times (3 + 0.6)}{4} \text{ kN} = 90 \text{ kN}$$

满载时 $\sum M_B (F) = 0$ ， $F_{P1\min} \times (e + a) - Gb - F_P l = 0$

$$\text{得 } F_{P1\min} = \frac{Gb + F_P l}{e + a} = \frac{100 \times 0.6 + 36 \times 10}{4 + 3} \text{ kN} = 60 \text{ kN}$$

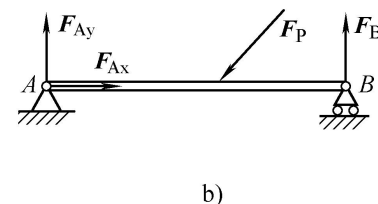
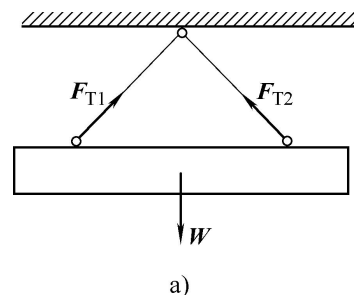
故为保证塔吊正常工作，平衡重的范围值为： $60\text{kN} < F_{P1} < 90\text{kN}$



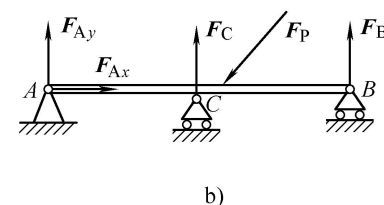
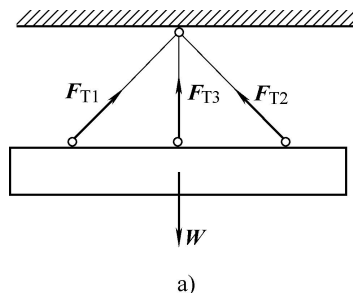
5.5 物体系统的平衡分析

一、静定与静不定问题的概念

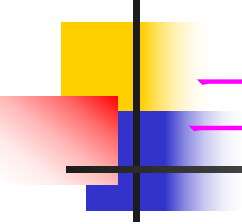
在刚体静力学分析中，若问题中未知量的数目少于或等于独立的平衡方程的数目，则全部未知量可以用平衡方程解出，这类问题称为**静定问题**。如右图a、b为静定结构。



当未知量的数目多于独立的平衡方程的数目，这些未知量则单靠平衡方程不能全部解出，这类问题称为**静不定问题或超静定问题**。如下图a、b为静不定结构。



静不定问题仅用静力平衡方程是不能解决的，需要补充方程才能求解全部约束反力。在此，仅分析静定问题。



二、物体系统的平衡分析

求解物体系统平衡（简称物系平衡）问题的步骤是：

➤ 选择适当的研究对象，画出各研究对象的分离体的受力图。

研究对象可以是物系整体、单个物体，也可以是物系中几个物体的组合。

➤ 分析各受力图，确定求解顺序。

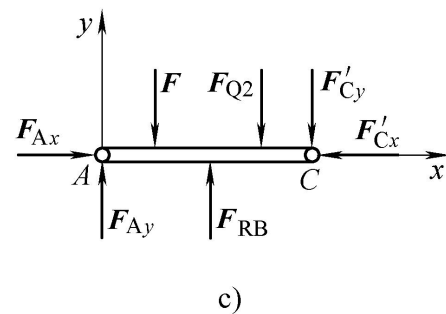
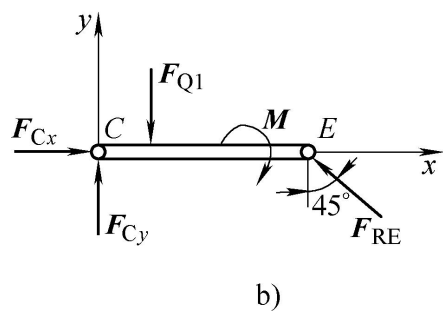
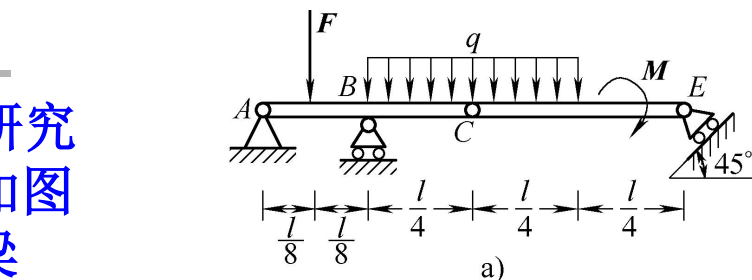
如某物体受平面任意力系作用，有四个未知量，但有三个未知量汇交于一点，则可取该三力汇交点为矩心，列方程解出不汇交于该点的那个未知力，这便是解题的突破口。

➤ 平衡方程，求解约束反力。

【例5-11】 组合梁由AC和CE用铰链连接，载荷及支承情况如图a所示，已知： $l = 8\text{m}$ ， $F = 5\text{kN}$ ，均布载荷集度 $q = 2.5\text{kN/m}$ ，力偶的矩 $M = 5\text{kN}\cdot\text{m}$ 。求支座A、B、E及中间铰C的反力。

解：（1）分别取梁CE及ABC为研究对象，画出各分离体的受力图，如图b、c所示。其中 F_{Q1} 和 F_{Q2} 分别为梁CE梁ABC上均布载荷的合力。

（2）列平衡方程求解，先以CE杆为研究对象，列平衡方程。

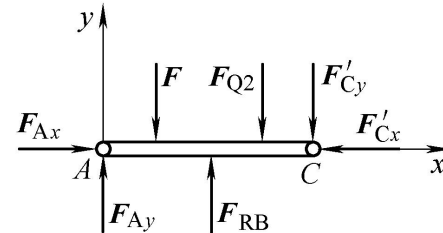
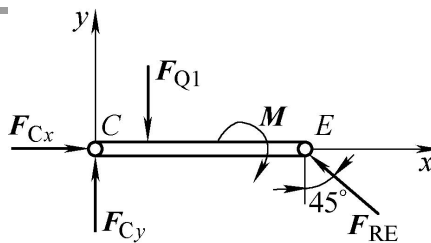
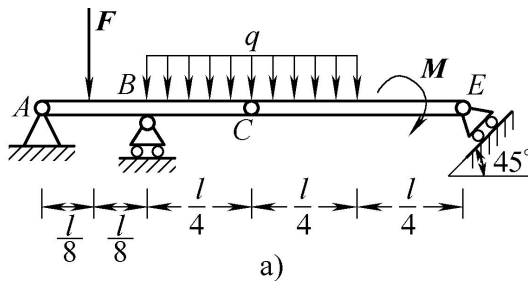
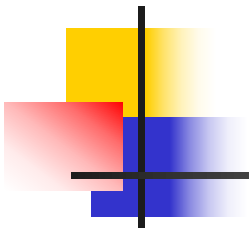


$$\sum F_x = 0, F_{Cx} - F_{RE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Cy} - F_{Q1} + F_{RE} \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum M_C(F) = 0, -F_{Q1} \times 1 - 5 + F_{RE} \sin 45^\circ \times 4 = 0$$

得 $F_{RE} = 3.54 \text{ kN}$, $F_{Cx} = 2.5 \text{ kN}$, $F_{Cy} = 2.5 \text{ kN}$



(3) 以 ABC 为研究对象，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F'_{Cx} = 0$$

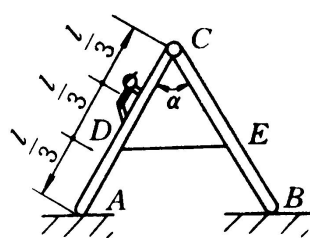
$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - F - F_{Q2} - F'_{Cy} + F_{RB} = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, -F \times 1 + F_{RB} \times 2 - F_{Q2} \times 3 - F'_{Cy} \times 4 = 0$$

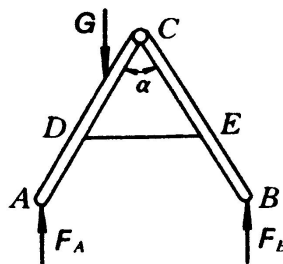
得 $F_{Ax} = 2.5 \text{ kN}$, $F_{Ay} = -2.5 \text{ kN}$ (方向向下), $F_{RB} = 15 \text{ kN}$

【例5-12】 如图a所示的人字梯 ACB 置于光滑水平面上，且处于平衡，已知人重为 G ，夹角为 α ，长度为 l ，求 A 、 B 和铰链 C 处的约束反力。

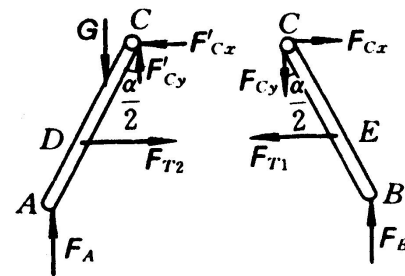
解： (1) 选取研究对象，画出整体及每个物体受力图如图b、c、d所示。



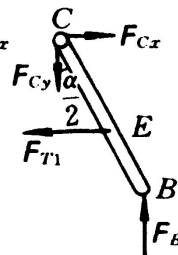
a)



b)



c)



d)

(2) 取整体为研究对象，列平衡方程求解。

$$\sum M_A(F) = 0, F_B \times 2 \sin \frac{\alpha}{2} - G \times \frac{2}{3} l \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

得 $F_B = \frac{G}{3}$

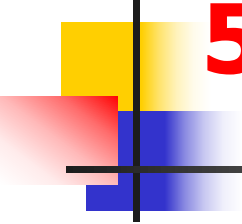
$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - G = 0$$

得 $F_A = G - F_B = G - \frac{G}{3} = \frac{2}{3} G$

(3) 取 BC 杆为研究对象，列平衡方程求解：

$$\sum F_y = 0 \quad F_B - F_{Cy} = 0 \quad \text{得} \quad F_{Cy} = F_B = \frac{G}{3}$$

$$\sum M_E(F) = 0 \quad F_B \frac{l}{3} \sin \frac{\alpha}{2} + F_{Cy} \frac{2l}{3} \sin \frac{\alpha}{2} - F_{Cx} \frac{2l}{3} \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{得} \quad F_{Cx} = \frac{G}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$$



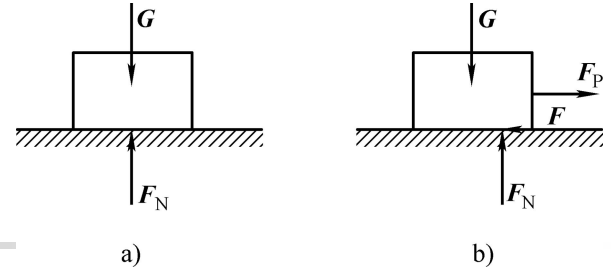
5.6 考虑摩擦时的平衡问题分析

摩擦通常表现为有利的和有害的两个方面。研究摩擦的目的在于掌握摩擦规律，从而达到兴利除弊的目的。

摩擦可分为滑动摩擦和滚动摩擦，本部分主要介绍滑动摩擦的相关概念、性质以及考虑摩擦时物体平衡问题的分析。

一、滑动摩擦的相关概念

滑动摩擦力：两个相互接触的物体，沿着它们的接触面有相对滑动或相对滑动的趋势时，在接触面间彼此作用着阻碍相对滑动的力。



若给物体一水平拉力 F_P ，并由零逐渐增大，接触面的摩擦力将出现以下几种情况：

1. 静摩擦力（静止状态）

静摩擦力 F 的大小随主动力 F_P 而改变，其方向与物体滑动趋势方向相反，由平衡条件确定。

2. 最大静摩擦力（临界状态） $F_{\max} = f_s F_N$ f_s 称为静摩擦因数

3. 动摩擦力（滑动状态） $F' = f F_N$ f 称为动摩擦因数

考虑滑动摩擦问题时，要分清物体处于静止、临界平衡和滑动三种情况中的哪种状态，然后选用相应的方法进行计算。

二、摩擦角和自锁

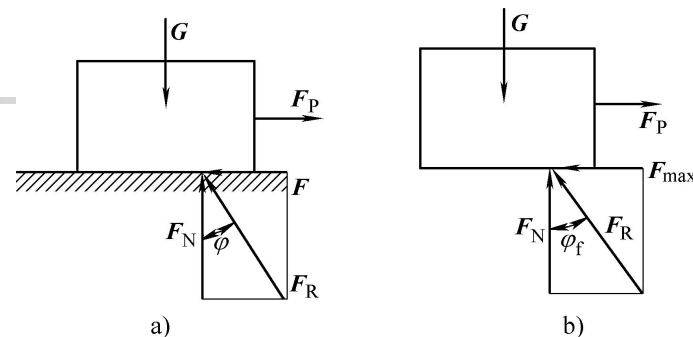
1. 摩擦角

➤ 全反力 F_R : 法向反力 F_N 和切向摩擦力 F 的合力。

➤ 摩擦角 φ_f : 最大静摩擦力 $F_{\max}$ 与法向反力 F_N 的夹角。

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

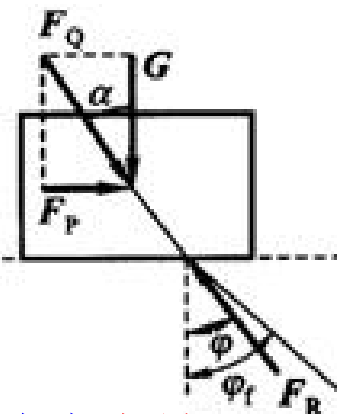
上式表明，摩擦角的正切等于静摩擦因数。这说明摩擦角与静摩擦因素只与物体接触面的材料、表面状况等因素有关。



2. 自锁

物体静止时，全反力与接触面法线间的夹角 φ 角总是小于等于摩擦角 φ_f ：
 $0 \leq \varphi \leq \varphi_f$ ，即全反力的作用线不可能超出摩擦角的范围。

(1) 当主动力的合力 F_Q 的作用线在摩擦角 φ_f 以内时，由二力平衡公理可知，全反力 F_R 与之平衡，如图所示。因此，只要主动力合力的作用线与接触面法线间的夹角 α 不超过 φ_f ，即 $\alpha \leq \varphi_f$



不论该合力的大小如何，物体便处于静止状态，这种现象称为**自锁**。

利用自锁原理可设计某些机构或夹具，如千斤顶、压榨机、圆锥销等，使之始终保持在平衡状态下工作

(2) 当主动力合力的作用线与接触面法线间的夹角 $\alpha > \varphi_f$ 时，全反力不可能与之平衡，因此不论这个力多么小，物体一定会滑动。

工程上，例如对于传动机构，利用这个原理，可避免自锁，使机构不致卡死。

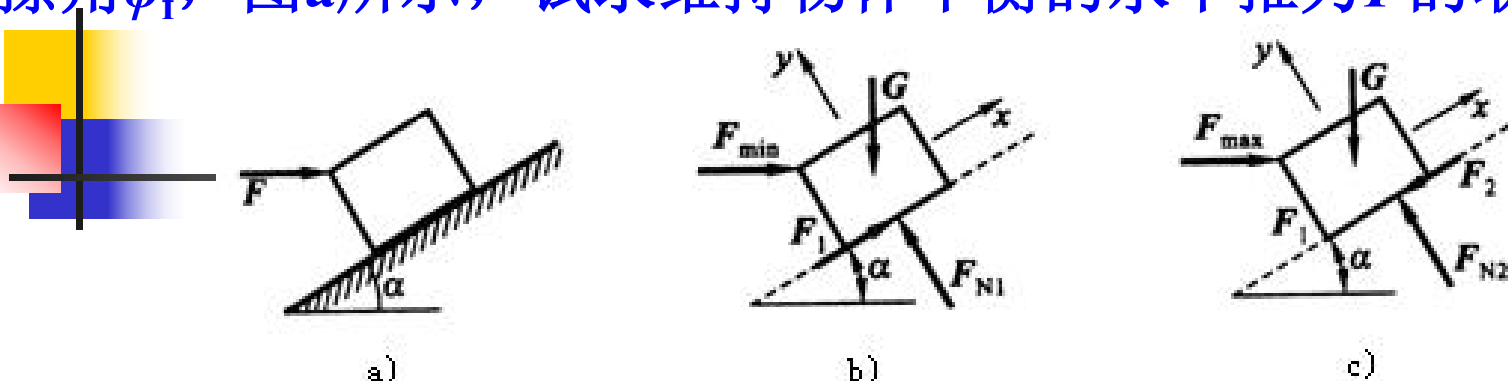


三、考虑摩擦时的平衡问题分析

求解考虑摩擦时的平衡问题，其方法和步骤与不计摩擦时的平衡问题分析方法基本相同，只是在受力分析和建立平衡方程时必须考虑摩擦力。

- 在一般平衡状态下，静摩擦力的大小由平衡条件确定，并满足 $F \leq F_{\max}$ 关系式；
- 在临界状态下，静摩擦力为一确定值，满足 $F = F_{\max} = f_s F_N$ 关系式。

【例5-13】重量为 G 的物体放在倾角为 α 的固定斜面上， α 大于摩擦角 φ_f ，图a所示，试求维持物体平衡的水平推力 F 的取值范围。



解：由题意可知， F 值过大，物块将上滑， F 值过小，物块将下滑，故 F 值只在一定范围内（ $F_{\min} \leq F \leq F_{\max}$ ）才能保持物块静止。 $F_{\min}$ 对应物块处于即将下滑的临界状态， $F_{\max}$ 对应物块处于即将上滑的临界状态。

(1) 求 $F_{\min}$ 。

假设静摩擦力 F_1 的方向应沿斜面向上，故其受力和坐标轴如图b所示。

由平衡方程

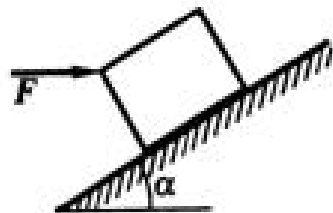
$$\sum F_x = 0, \quad F_{\min} \cos \alpha + F_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{\min} \sin \alpha - G \cos \alpha + F_{N1} = 0$$

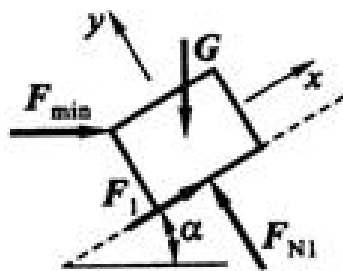
由静摩擦定律，建立补充方程 $F_1 = f_s F_{N1} = F_{N1} \tan \varphi_f$

解得

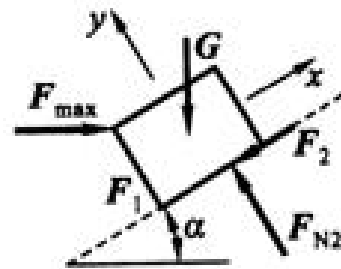
$$F_{\min} = G \frac{\sin \alpha - f_s \cos \alpha}{\cos \alpha + f_s \sin \alpha} = G \tan(\alpha - \varphi_f)$$



a)



b)



c)

(2) 求 $F_{\max}$ 。

假设静摩擦力 F_2 的方向应沿斜面向下，故其受力图如图c所示。
由平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_{\max} \cos \alpha - G \sin \alpha - F_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0, -F_{\max} \sin \alpha - G \cos \alpha + F_{N2} = 0$$

由静摩擦定律，建立补充方程

$$F_2 = f_s F_{N2} = F_{N2} \tan \varphi_f$$

解得
$$F_{\max} = G \frac{\sin \alpha + f_s \cos \alpha}{\cos \alpha - f_s \sin \alpha} = G \tan(\alpha + \varphi_f)$$

综合上述两个结果得知：欲使物体保持平衡，力 F 的取值范围为：

$$G \tan(\alpha - \varphi_f) \leq F \leq G \tan(\alpha + \varphi_f)$$

【例5-14】重量为200N的梯子 AB 一端靠在铅垂的墙壁上，另一端搁置在水平地面上，如图a所示，其中 $\theta = \arctan 4/3$ 。假设梯子与墙壁间为光滑约束，而与地面之间存在摩擦，静摩擦因数 $f_s = 0.5$ 。问梯子是处于静止还是会滑倒？此时，摩擦力的大小为多少？

解：取梯子为研究对象。其受力图如图b所示。此时，设梯子 A 端有向左滑动的趋势。由平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_A + F_{NB} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{NA} - W = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, W \frac{l}{2} \cos \theta - F_{NB} l \sin \theta = 0$$

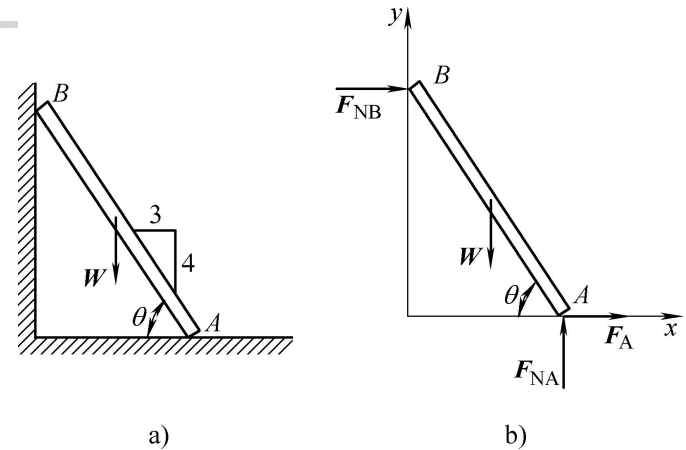
解得

$$F_{NA} = W = 200\text{N}$$

$$F_A = -F_{NB} = -\frac{1}{2}W \cdot \cot \theta = -75\text{N}$$

据静摩擦定律，可能达到的最大静摩擦力 $F_{A\max} = f_s F_{NA} = 0.5 \times 200\text{N} = 100\text{N}$

求得的静摩擦力为负值，说明真实的指向与假设方向相反，即梯子有向右的趋势，又因为 $|F_A| < F_{A\max}$ ，说明梯子处于静止状态。

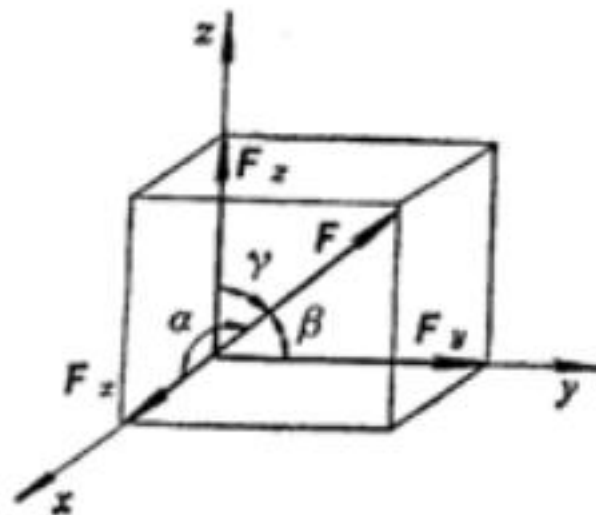


5.7 空间力系的合成与平衡分析

一、力在空间直角坐标轴上的投影

1、直接投影法

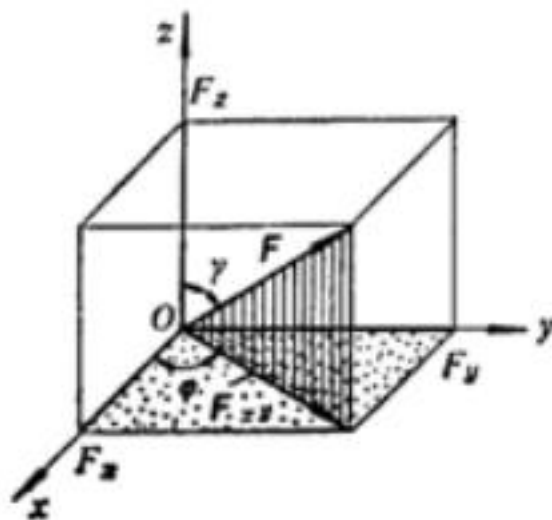
$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \cos \beta \\ F_z = F \cos \gamma \end{cases}$$



其中， α 、 β 、 γ 分别为力 F 与 x 、 y 、 z 三坐标轴间的夹角。

2、二次投影法

$$\begin{cases} F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \sin \gamma \sin \varphi \\ F_z = F \cos \gamma \end{cases}$$



其中 γ 为力 F 与 z 轴间的夹角， φ 为 F_{xy} 与 x 轴间的夹角

如果已知力 F 在三个坐标轴上的投影 F_x 、 F_y 、 F_z 的值

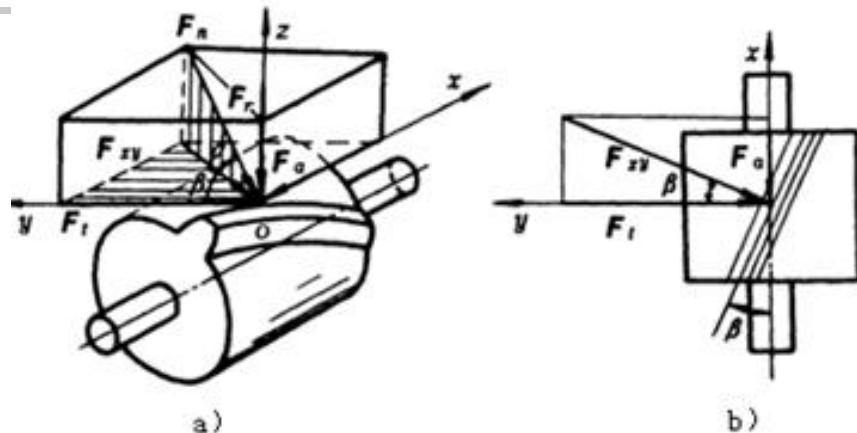
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{F_x}{F} \\ \cos \beta = \frac{F_y}{F} \\ \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \end{cases}$$

【例5-15】 如图所示圆柱斜齿轮所受的啮合力 $F_n = 1410\text{N}$ ，齿轮压力角 $\alpha = 20^\circ$ ，螺旋角 $\beta = 25^\circ$ ，试计算斜齿轮所受的圆周力 F_t 、轴向力 F_a 和径向力 F_r 。

解：取坐标系如图a所示，使 x 、 y 、 z 分别沿齿轮的轴向、圆周的切线方向和径向。

首先把啮合力 F_n 向 z 轴和坐标平面 xoy 投影，得



$$F_r = -F_z = -F_n \sin\alpha = -1410\text{N} \sin 20^\circ = -482\text{N}$$

F_n 在 xoy 平面上的分力 F_{xy} ，其大小为：

$$F_{xy} = F_n \cos\alpha = 1410\text{N} \cos 20^\circ = 1325\text{N}$$

再把 F_{xy} 投影到 x 、 y 轴（见图b），得：

$$F_a = -F_x = -F_{xy} \sin\beta = -560\text{N}$$

$$F_t = -F_y = -F_{xy} \cos\beta = -1201\text{N}$$

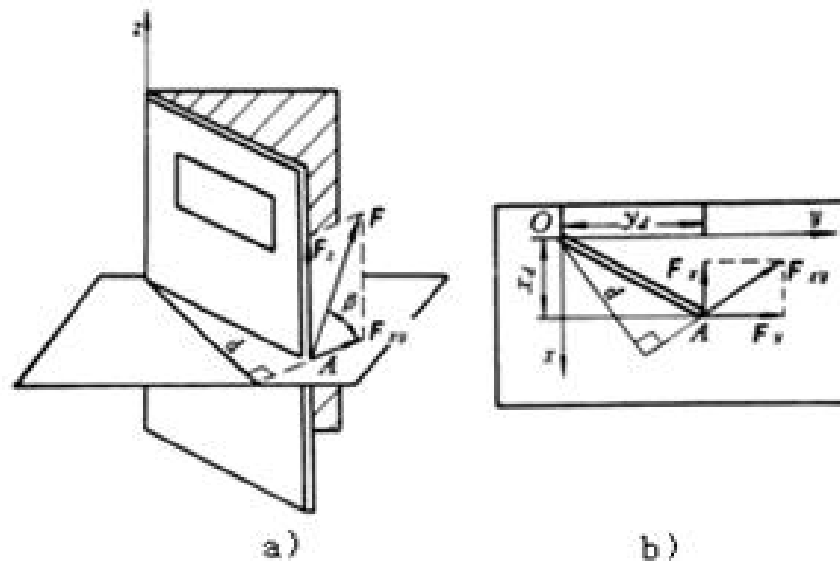
二、力对轴之矩

1、力对轴之矩的概念

力 F 分解为两个互相垂直的分力：

与转轴平行的分力 $F_z = F \sin \beta$ ；

与转轴垂直平面上的分力 $F_{xy} = F \cos \beta$ 。



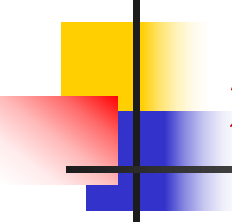
如以 d 表示 F_{xy} 作用线到 z 轴与平面的交点 O 的距离，则 F_{xy} 对 O 点之矩，就可以用来度量力 F 绕 z 轴转动的效应，记作：

$$M_z(F) = M_o(F_{xy}) = \pm F_{xy} d$$

力对轴之矩在轴上的投影是代数量，其值等于此力在垂直该轴平面上的投影对该轴与此平面的交点之矩。

力对轴之矩的单位是 $\text{N} \cdot \text{m}$

当力的作用线与转轴平行（ $F_{xy} = 0$ ），或者与转轴相交时（ $d = 0$ ），即当力与转轴共面时，力对该轴之矩等于零。



2、合力矩定理

设有一空间力系 F_1 、 F_2 、...、 F_n ，其合力为 F_R ，
则合力 F_R 对某轴之矩等于各分力对同轴力矩的代数和。即：

$$M_z (F_R) = \sum M_z (F)$$

上式常被用来计算空间力对轴求矩。

【例5-16】 计算如图所示手摇曲柄上 F 对 x 、 y 、 z 轴之矩。已知 F 为平行于 xz 平面的力， $F = 100\text{N}$ ， $\alpha = 60^\circ$ ， $AB = 20\text{cm}$ ， $BC = 40\text{cm}$ ， $CD = 15\text{cm}$ ， A 、 B 、 C 、 D 处于同一水平面。

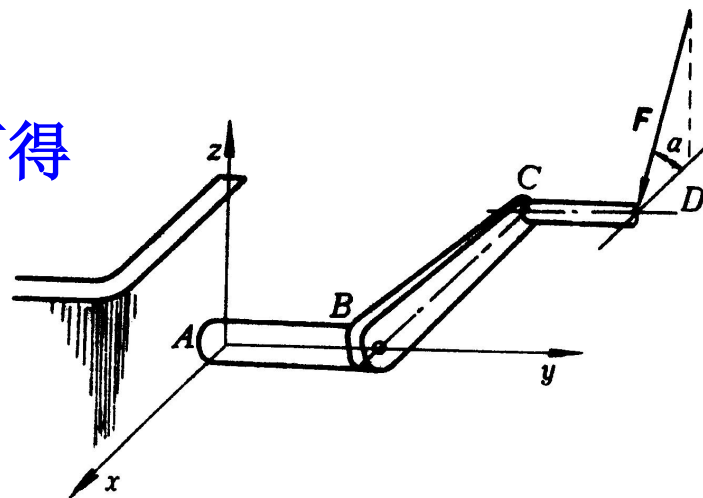
解： 根据力在直角坐标轴上的投影可得

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_z = -F \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} M_x(F) &= -F_z (AB + CD) \\ &= -100\text{N} \sin 60^\circ \times 0.35\text{ m} \\ &= -30.31\text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y(F) &= -F_z BC \\ &= -100\text{N} \sin 60^\circ \times 0.4\text{m} = -4.64\text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

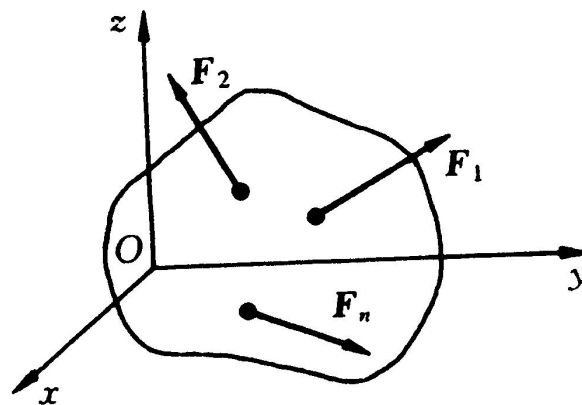
$$\begin{aligned} M_z(F) &= -F_x (AB + CD) \\ &= -100\text{N} \cos 60^\circ \times 0.35\text{m} = -17.5\text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



四、空间力系的平衡方程及其应用

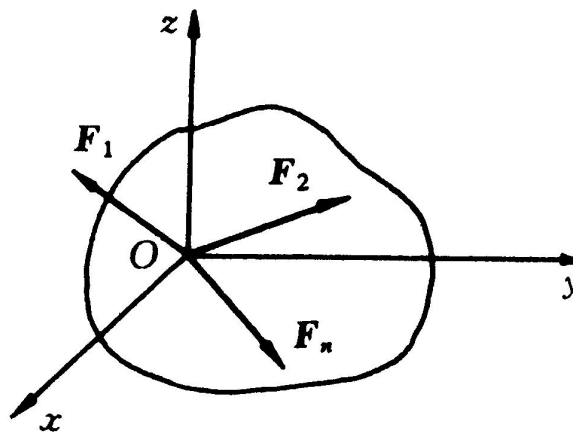
1、空间任意力系的平衡方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_x(F) = 0 \\ \sum M_y(F) = 0 \\ \sum M_z(F) = 0 \end{array} \right.$$



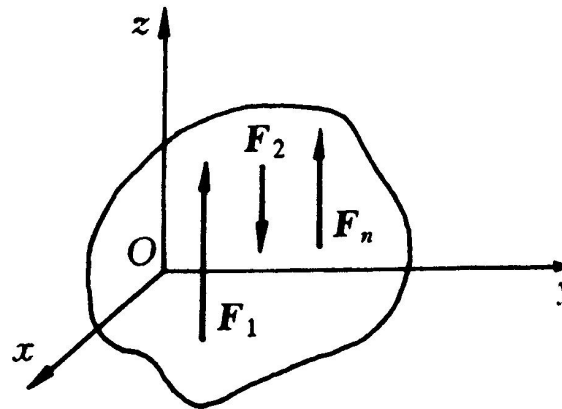
2、空间汇交力系的平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$



3、空间平行力系的平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum M_x(F) = 0 \\ \sum M_y(F) = 0 \end{cases}$$



【例5-17】 如图所示为某设备传动轴用A、B两轴承支承。圆柱直齿轮的节圆直径 $d=17.3\text{mm}$ ，压力角 $\alpha=20^\circ$ ，在法兰盘上作用一力偶，其力偶矩 $M=1030\text{N}\cdot\text{m}$ 。若轮轴自重和摩擦不计，求传动轴匀速转动时A、B两轴承的反力及齿轮所受的啮合力 F 。

解：（1）取整个轴为研究对象。设A、B两轴承的反力分别为 F_{Ax} 、 F_{Az} 、 F_{Bx} 、 F_{Bz} ，并沿x、z轴正向，此外还有力偶 M 和齿轮所受的啮合力 F ，这些力构成空间任意力系。

（2）取坐标轴如图所示，列平衡方程

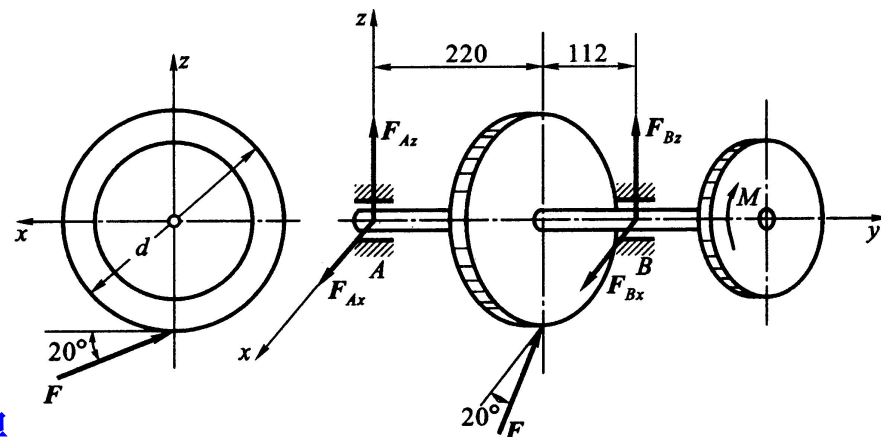
$$\sum M_y(F) = 0, \quad -M + F \cos 20^\circ \times d/2 = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0, \quad F \sin 20^\circ \times 220 + F_{Bz} \times 332 = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0, \quad -F_{Bx} \times 332 + F \cos 20^\circ \times 220 = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_{Bx} - F \cos 20^\circ = 0$$

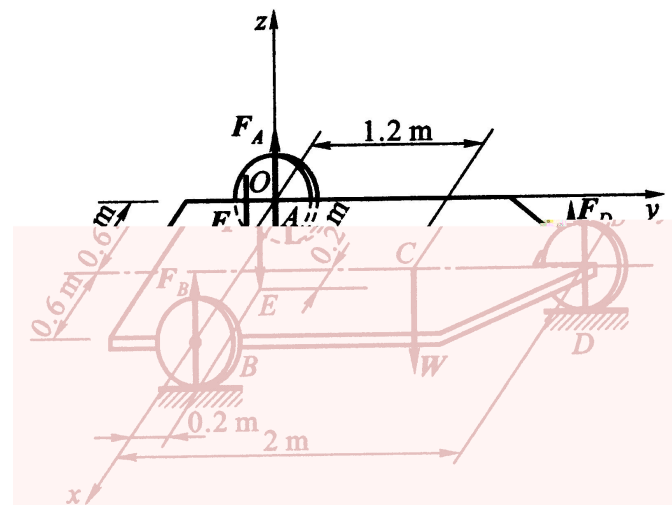
$$\sum F_z = 0, \quad F_{Az} + F_{Bz} + F \sin 20^\circ = 0$$



得： $F=12.67\text{kN}$ ， $F_{Bz}=-2.87\text{kN}$ ， $F_{Bx}=7.89\text{kN}$ ， $F_{Ax}=4.02\text{kN}$ ， $F_{Az}=-1.46\text{kN}$

【例5-18】 如图所示某三轮小车自重 $W = 8 \text{ kN}$ ，作用于点 C ，载荷 $F = 10 \text{ kN}$ ，作用于点 E ，试求小车静止时地面对车轮的反力。

解： (1) 选小车为研究对象，画受力图如图所示。其中 W 和 F 为主动力， F_A 、 F_B 、 F_D 为地面的约束反力，此五个力相互平行，组成空间平行力系。



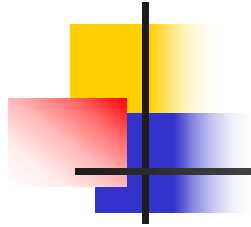
(2) 建坐标轴如图所示，列平衡方程。

$$\sum F_z = 0, \quad -F - W + F_A + F_B + F_D = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0, \quad -0.2 \times F - 1.2 \times W + 2 \times F_D = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0, \quad 0.8 \times F + 0.6 \times W - 0.6 \times F_D - 1.2 \times F_B = 0$$

得 $F_D = 5.8 \text{ kN}$, $F_B = 7.78 \text{ kN}$, $F_A = -4.42 \text{ kN}$



END