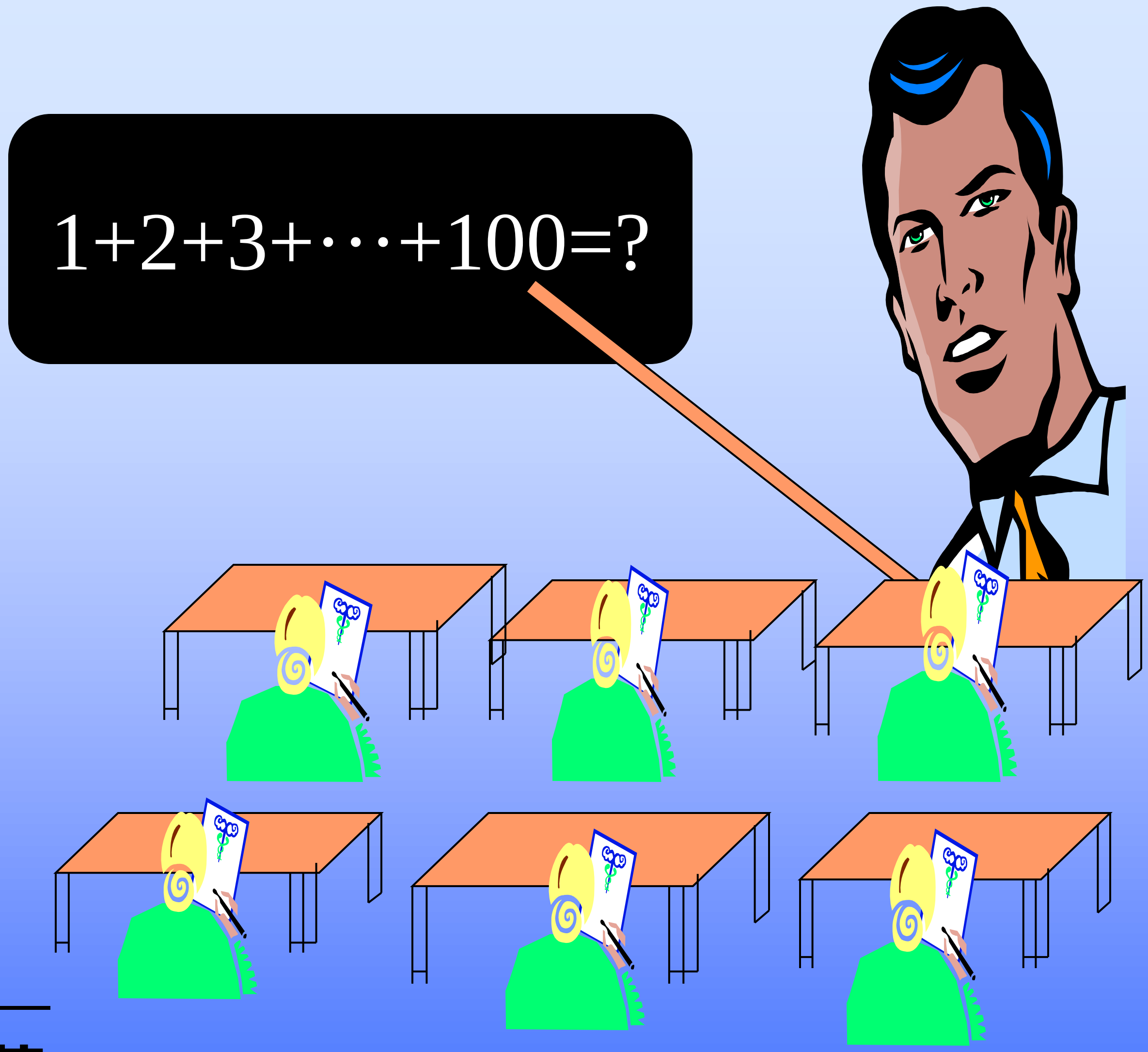
等差数列

引例一

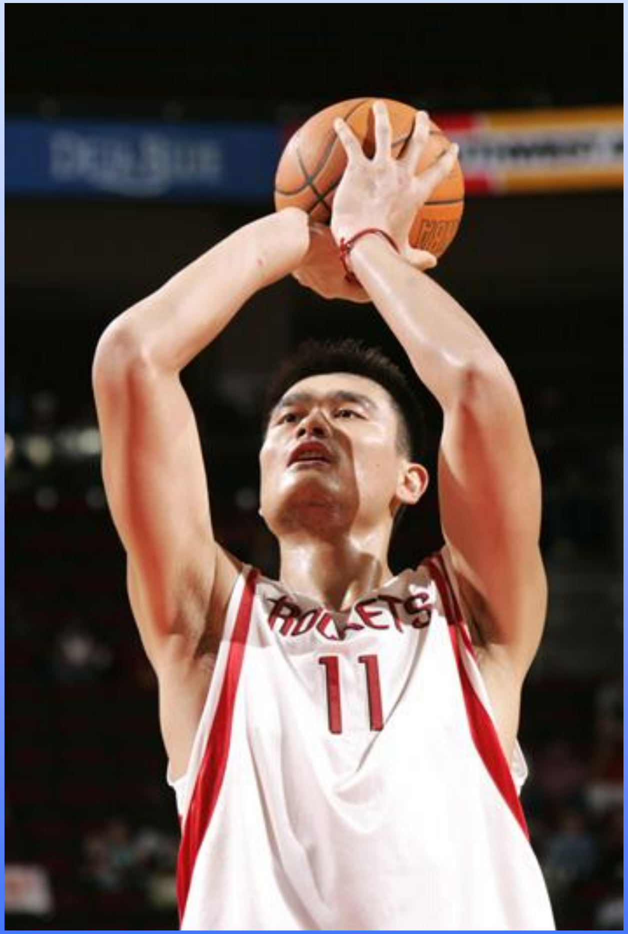


高斯，（1777—1855） 德国著名数学家。

得到数列 1，2，3，4， …，100

引例二

姚明刚进NBA一周训练罚球的个数：



第一天：6000，

第二天：6500，

第三天：7000，

第四天：7500，

第五天：8000，

第六天：8500，

第七天：9000.

得到数列：

6000，6500，7000，7500，8000，8500，9000

引例三

匡威运动鞋（女）的尺码（鞋底长，单位是cm）

$22\frac{1}{2}$，23，$23\frac{1}{2}$，24，

$24\frac{1}{2}$，25，$25\frac{1}{2}$，26，

得到数列

$22\frac{1}{2}$，23，$23\frac{1}{2}$，24，

$24\frac{1}{2}$，25，$25\frac{1}{2}$，26，

观察归纳

发现？

高斯计算的数列：

1，2，3，4， … ，100

姚明罚球个数的数列：

6000，6500，7000，7500，8000，8500，9000

运动鞋尺码的数列

$22\frac{1}{2}$，23，$23\frac{1}{2}$，24，$24\frac{1}{2}$，25，$25\frac{1}{2}$，26

观察：以上数列有什么共同特点？

从第 2项起，每一项与前一项的差都等于同一常数。

等差数列定义

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差等于**同一个常数**，那么这个数列就叫做等差数列。这个常数叫做等差数列的**公差**，通常用字母**d**表示。

①1，2，3,…,100； $\boxed{公差d=1}$

②6000，6500，7000，7500，8000，8500,9000 $\boxed{公差d=500}$

③ $22\frac{1}{2}$，23，$23\frac{1}{2}$，24，$24\frac{1}{2}$，25，$25\frac{1}{2}$，26 $\boxed{公差d=\frac{1}{2}}$

递推公式$a_n-a_{n-1}=d$

（d是常数，n≥2，$n\in N^*$）

想一想

1、数列6，4，2，0,-2,-4…是否为等差数列？若是，则公差是多少?若不是，说明理由

公差是-2

2、常数列*a*，*a*，*a*，…是否为等差数列?若是，则公差是多少?若不是，说明理由

公差是0

3、数列0，1，0，1，0，1是否为等差数列?若是，则公差是多少?若不是，说明理由

不是

注意

公差d是每一项（第2项起）与它的前一项的差，防止把被减数与减

负数，也可以为0

小结：判断一个数列是不是等差数列，主要是由定义进行判断：$a_{n+1}-a_n$是不是同一个常数？

通项公式

已知等差数列｛a_n｝的首项是a_1，公差是d

$a_2-a_1=d$ （1）

$a_3-a_2=d$ （2）

$a_4-a_3=d$ （3）

……

$a_n-a_{n-1}=d$ （n−1）

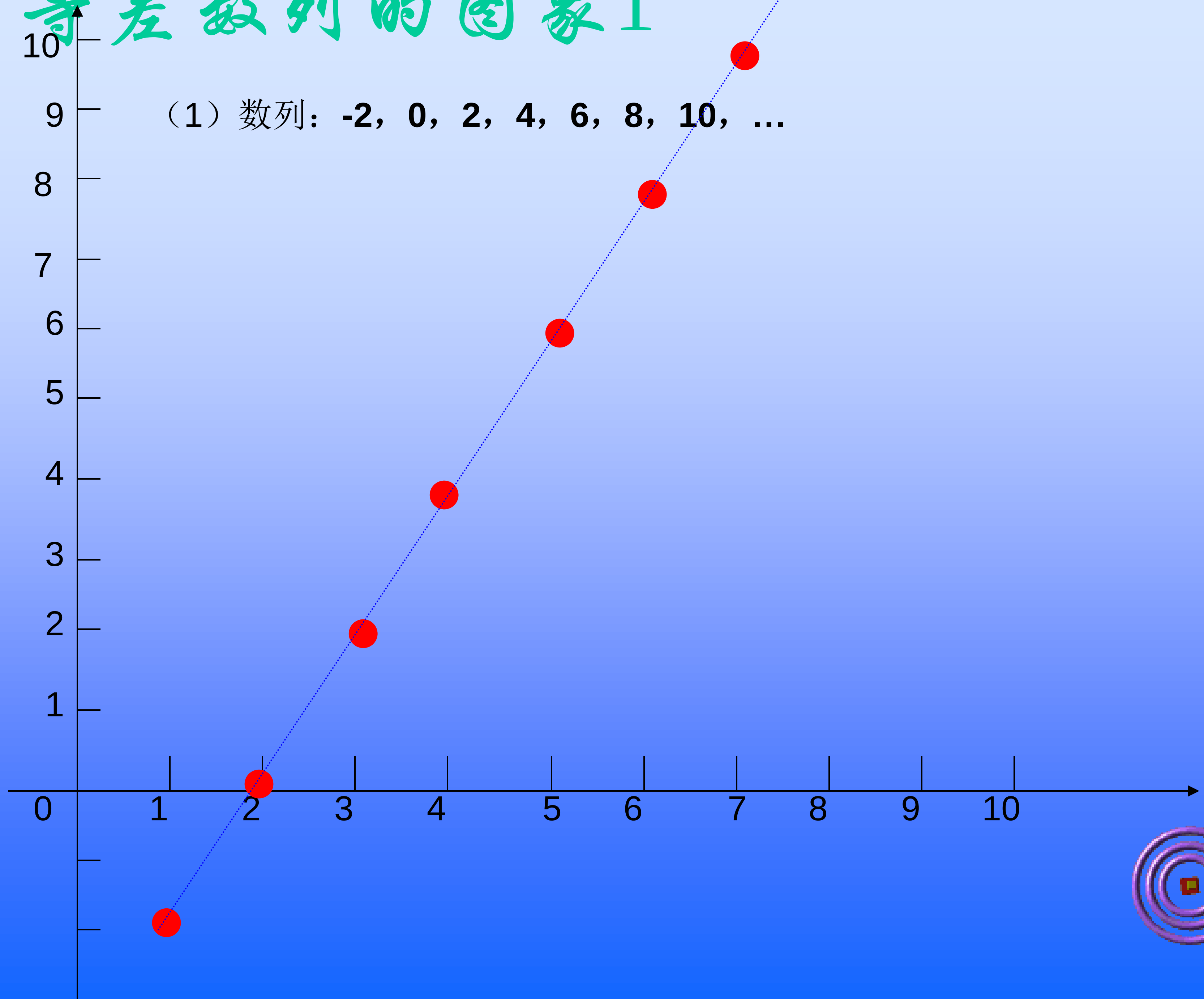
累差迭加法

(1)式+(2)式+…+(n−1)式得：

$a_n-a_1=$（n−1）d,即 $\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$

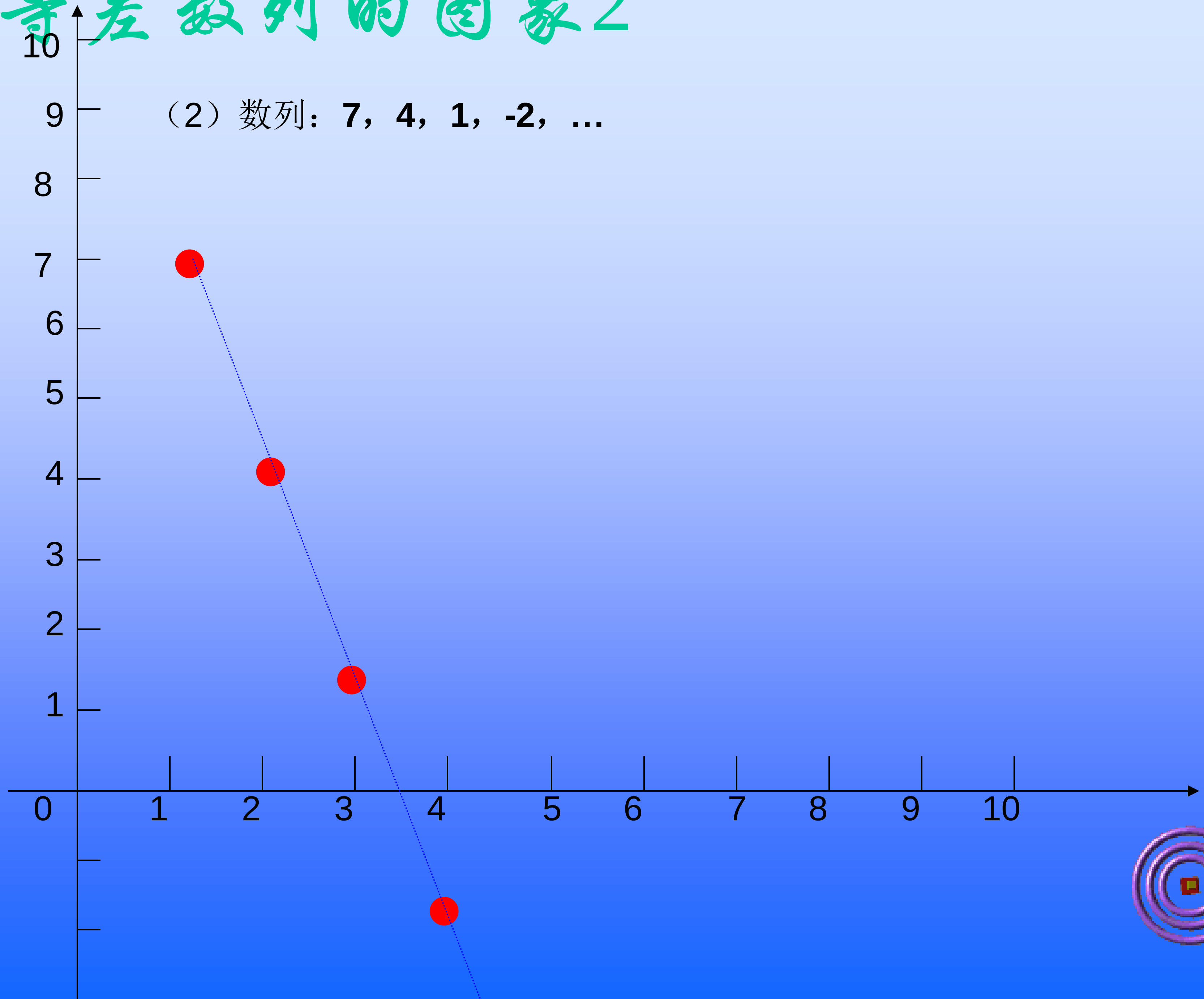
等差数列的图象1

（1）数列：**-2，0，2，4，6，8，10，…**



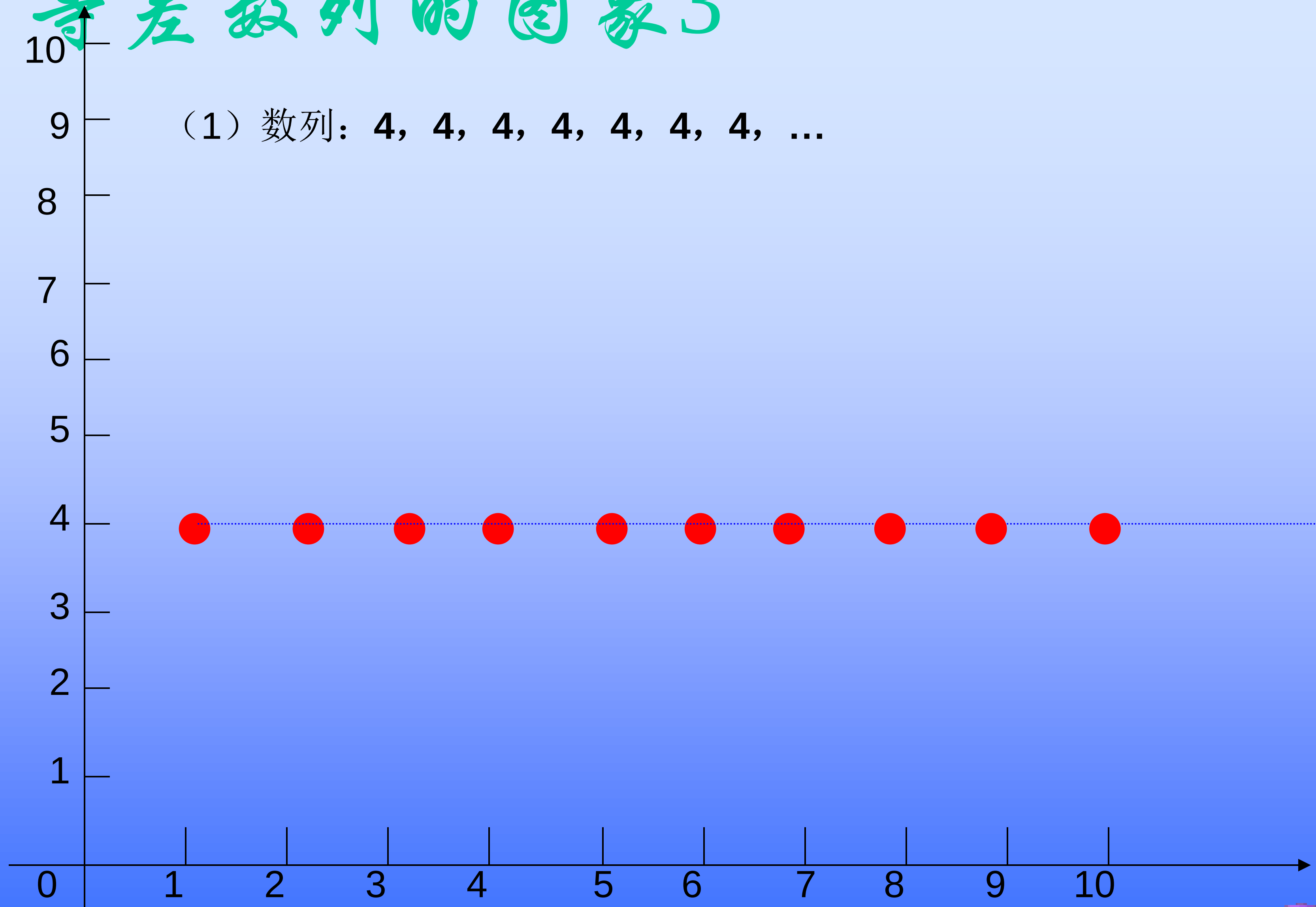
等差数列的图象2

（2）数列：**7，4，1，-2，…**



等差数列的图象3

（1）数列：**4，4，4，4，4，4，4，…**



等差数列各项对应的点都在同一条直线上

通项公式中含有a_1，d，n，a_n四个量，从已知和未知的角度看，若已知其中任意三个量的值，即可利用方程的思想求出第四个量的值（即知三求四）．

- 通项公式的应用：
- ①可以由首项和公差求出等差数列中的任意一项；
- ②已知等差数列的任意两项，可以确定数列的任意一项。

例题讲解

例1　已知等差数列的首项 a_1是3，公差d 是2，求它 的通项公式。

分析：知道a_1,d ,求a_n .代入通项公式。

解： $\because$ $a_1=3$, $d=2$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d$

$=3+(n-1)\times 2$

$=2n+1$

例题讲解

例2　求等差数列 10， 8， 6， …的第20项。

分析： 根据$a_1=10$，d= -2，先求出通项公式a_n，再求出a_{20}

解： ∵ $a_1=10$, $d=8-10=-2$， $n=20$

由$a_n=a_1+(n-1)d$ 得

∴ $a_{20}=a_1+(n-1)d$

$=10+(20-1)\times(-2)$

$=-28$

试一试

1. 100是不是等差数列2，9，16，…的项？如果是，是第几项？如果不是，请说明理由

分析：先求出数列的通项公式，然后假设100是等差数列中的项，求出n

解： ∵ $a_1=2$ ， d=7

∴ $a_n=a_1+(n-1)7$

$=2+(n-1)\times 7=7n-5$

令100=7n−5 ∴n=15

∴100是等差数列的第15项

例题讲解

例3　在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_6=12$，$a_{18}=36$，求通项公式a_n

分析： 此题已知$a_6=12$，$n=6$；$a_{18}=36$，$n=18$分别代入通项公式$a_n = a_1+(n-1)d$中，可得两个方程，都含a_1与d两个未知数组成方程组，可解出a_1与d。

解：由题意可得

$a_1+5d=12$，$a_1+17d=36$

$\therefore$ $d = 2$，$a_1 = 2$

$\therefore$ $a_n = 2+(n-1)\times 2 = 2n$

试一试

2. 在等差数列$\{a_n\}$中, 已知$a_5=10$ ， $a_{12}=31$ ，求通项公式a_n

分析： **此题已知$a_5=10$，n=5；$a_{12}=31$, n=12分别代入通项公式$a_n = a_1+(n-1)d$中，可得两个方程，都含a_1与d两个未知数组成方程组，可解出a_1与d 。**

解：设$a_n=a_1+(n-1)d$，则有

$$a_1+4d=10 , a_1+11d=31$$

$$\therefore a_1 =-2,\ d = 3,$$

$$\therefore a_n =-2+(n-1)\times 3 = 3n-5$$

古题今解

我国古代算书《孙子算经》卷中第25题记有："今有五等诸侯，共分橘子六十颗。人分加三颗。问：五人各得几何？"

分析：此题已知$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=60$，d=3，

$\therefore$ $a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)=60$,

$\therefore$ $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=12$, $a_4=15$, $a_5=18$

即为五等诸侯分到橘子的颗数。

等差中项

如果在 a 和 b 之间插入一个数A，使 a、A、b 成等差数列，则 A 叫做 a、b 的__等差中项__。

有 $A=\frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2A=a+b$

反之 也成立,

即若 a + b = 2A，则a、A、b 成 等差数列

一般地，在等差数列中，从第二项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项。即

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \quad (n \geqslant 2)$$

若a,b,c成等差数列，那么$b=\dfrac{a+c}{2};2b=a+c;$

$b-a=c-b;a-b=b-c$都是等价的。

例题分析

例1 (1)已知数列{ a_n }的通项公式是a_n =3n-1，

求证：{a_n}为等差数列；

(2) 已知数列{a_n}是等差数列，

求证：数列{a_n+a_{n+1}} 也是等差数列.

【小结】

①数列{ a_n }为等差数⇔ $a_n=kn+b$ k、b是常数；

②证明一个数列为等差数列的方法是_：

证明： a_{n+1} — a_n为一个常数.

例2 (1)等差数列11，8，5，…，的第19项是$\underline{\quad -49 \quad}$；

(2)等差数列-5，-9，-13，…的第$\underline{\quad 99 \quad}$项是-307；

(3)已知$\{a_n\}$为等差数列，若$a_1=3$，$d=\frac{3}{2}$，$a_n=21$，

则$n=\underline{\quad 13 \quad}$；

(4)已知$\{a_n\}$为等差数列，若$a_{17}=\frac{5}{2}$，$d=\frac{2}{3}$，则

$a_{10}=\underline{\quad -\frac{13}{6} \quad}$.

【说明】在等差数列$\{a_n\}$的通项公式中a_1、d、a_n、n

任知$\underline{\quad 三 \quad}$个，可求$\underline{\quad 另外一个 \quad}$.

数列$\{a_n\}$是等差数列，$m,n,p,q\in N_+$，且$m+n=p+q$，求证：$a_m+a_n=a_p+a_q$.

证明：设$\{a_n\}$的首项是a_1，公差是d，

则$a_m=a_1+(m-1)d$，　　$a_n=a_1+(n-1)d$，

$a_p=a_1+(p-1)d$，　　$a_q=a_1+(q-1)d$，

$\therefore a_m+a_n=2a_1+(m+n-2)d$，

$a_p+a_q=2a_1+(p+q-2)d$，

$\because m+n=p+q, \therefore a_m+a_n=a_p+a_q$.

等差数列的性质1

1. $\{a_n\}$为等差数列 $\Leftrightarrow$ $a_{n+1}-a_n=d$ $\Leftrightarrow$ $a_{n+1}=a_n+d$

$\Leftrightarrow$ $a_n=a_1+(n-1)d$ $\Leftrightarrow$ $a_n=kn+b$（k、b为常数）

2. a、b、c成等差数列 $\Leftrightarrow$ b为a、c 的等差中项

$$\Leftrightarrow \quad b=\frac{a+c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2b=a+c$$

【说明】

3.更一般的情形，$a_n=$ $a_m+(n-m)d$ ，$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$

4.在等差数列$\{a_n\}$中，由 $m+n=p+q$ NEXT $a_m+a_n=a_p+a_q$

例题分析

例3 .在等差数列$\{a_n\}$中

(1) 已知 $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$，求a_1+a_{20}

分析：由 $a_1+a_{20}=a_6+a_{15}=a_9+a_{12}$

及 $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$，可得$a_1+a_{20}=10$

(2）已知 $a_3+a_{11}=10$，求 $a_6+a_7+a_8$

分析： $a_3+a_{11}=a_6+a_8=2a_7$，又已知 $a_3+a_{11}=10$，

$\therefore a_6+a_7+a_8=\frac{3}{2}(a_3+a_{11})=15$

已知$\{a_n\}$为等差数列

且 $a_4+a_5+a_6+a_7=56$，$a_4a_7=187$，求公差d.

三数成等差数列，它们的和为12，首尾二数的积为12，求此三数.

结论归纳1:

数列$\{a_n\}$是公差为d 的等差数列。

数列$a_1,a_3,a_5,a_7,\ldots\ldots$是公差为<u>2d</u>等差数列

数列$a_2,a_4,a_6,a_8,\ldots\ldots$是公差为<u>2d</u>等差数列

数列$ma_2,ma_4,ma_6,ma_8,\ldots\ldots$是公差为<u>2md</u>等差数列

数列$a_1+a_2,\ a_2+a_3,\ a_3+a_4,\ a_3+a_4,\ldots\ldots$是公差为<u>2d</u>等差数列

结论归纳2:

等差数列中有关项的设法

当等差数列$\{a_n\}$的项数为奇数时，可设中间一项为a，再以公差为d向两边分别设项;

当等差数列$\{a_n\}$的项数为偶数时，可设中间两项分别为a-d，a+d，再以公差为2d向两边分别设项

对称项设法的优点：若有n个数构成等差数列．利用对称项设出这个数列，则其各项和为na.

谢谢大家！

再见！