



等差数列的前 n 项和公式

🔑 等差数列: $a_{n+1}-a_n=d$ (常数)

🔑 公差: d

🔑 通项公式: $a_n=a_1+(n-1)d$

🔑 重要性质: $a_n=a_m+(n-m)d$

复习

引入



高斯, (1777—1855) 德国著名数学家。

$$1+2+3+\dots+98+99+100=?$$

高斯10岁时曾很快算出这一结果, 如何算的呢?

我们先看下面的问题。



$$* 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100 = ?$$

• 高斯算法 >>>>



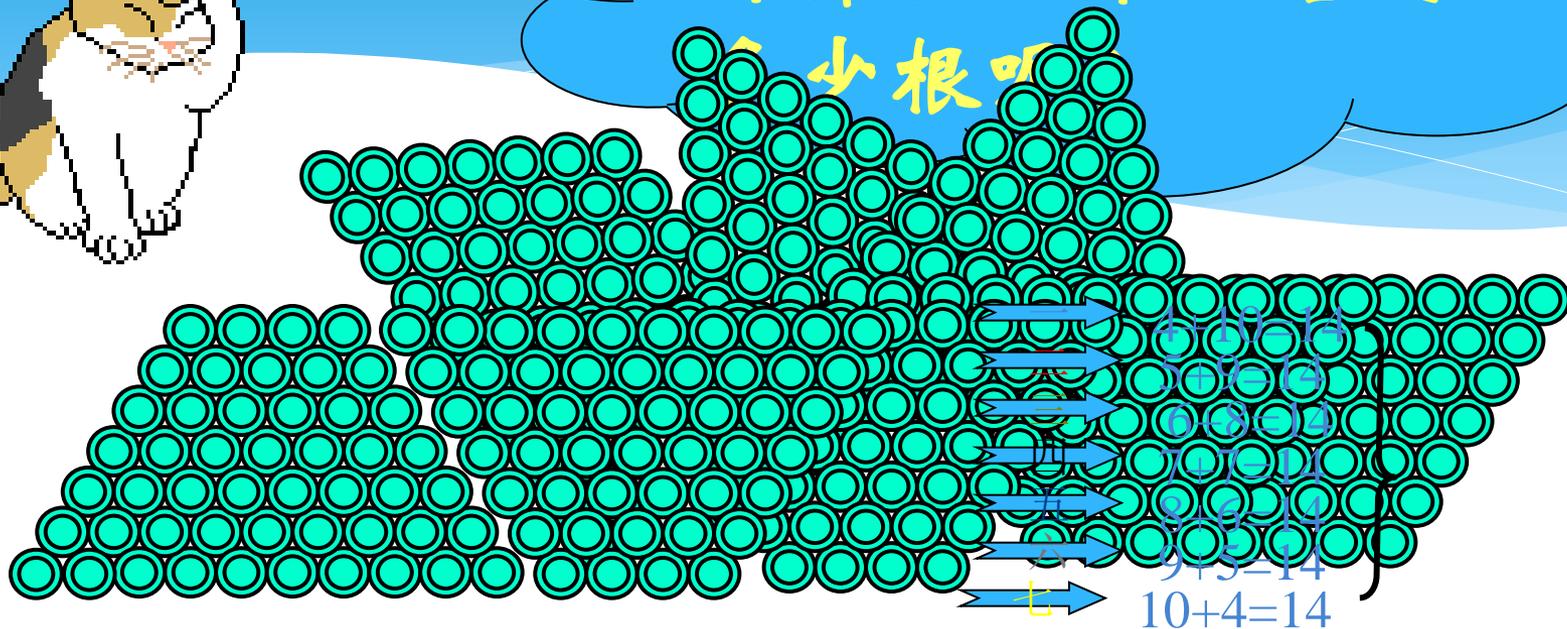
高斯是德国数学家，也是科学家，他和牛顿、阿基米德，被誉为有史以来的三大数学家。高斯是近代数学奠基者之一，在历史上影响之大，可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列，有“数学王子”之称。高斯的数学研究几乎遍及所有领域，在数论、代数学、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都做出了开创性的贡献。

由于高斯在数学、天文学、大地测量学和物理学中的杰出研究成果，他被选为许多科学院和学术团体的成员。“数学之王”的称号是对他一生恰如其分的赞颂。

问题?



怎样才能快速
计算出一堆钢管有
多少根呢?



- (1) 先算出各层的根数，**哇，每层都是14根；**
(2) 再算出钢管的层数，**共7层哩。**

所以钢管总根数是： $\frac{1}{2}(4+10) \times 7 = 49(\text{根})$

下面再来看 $1+2+3+\dots+98+99+100$ 的高斯算法。

$$\text{设 } S_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & & + & + & + \\ \text{反序 } S_{100} & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

作
加
法

$$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

100个101

$$\text{所以 } S_{100} = \frac{1}{2} (1+100) \times 100 = 5050$$

这就是等差数列前n项和的公式!

总和

$$= \frac{1}{2} ($$

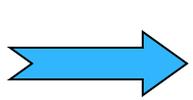
首项

+

尾项

)

项数



$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

以下证明

$\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是前 n 项和, 则

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

证: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ ①

即 $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$ ②

把①+②得: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1)$ ③

由等差数列的性质知:

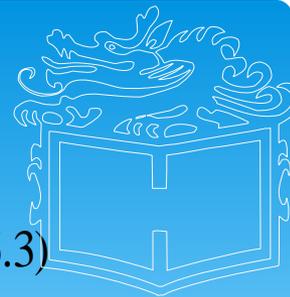
$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_n + a_1$, 所以③式可化为:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ 个 } (a_1 + a_n)} = n(a_1 + a_n)$$

共有 n 个 $(a_1 + a_n)$

因此, $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

这种求和的方法叫倒序相加法!



等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \dots\dots\dots (6.3)$

知道了等差数列 $\{a_n\}$ 中的 a_1 、 n 和 a_n ，利用公式 (6.3) 可以直接计算 S_n 。

将等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入上面公式

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \dots\dots\dots (6.4)$$

知道了等差数列 $\{a_n\}$ 中的 a_1 、 d 、 n 和 S_n ，利用公式 (6.4) 可以直接计算。

动脑思考
探索新知



* 公式结构:

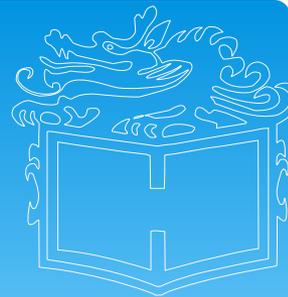
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

项数 首项 末项

前 n 项和 项数 公差

注:1、五个元素: a_1, a_n, d, n, S_n , 知“三”可求“二”

6.2 等差数列



例5 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -8$, $a_{20} = 106$, 求 S_{20} .

解 由已知条件得

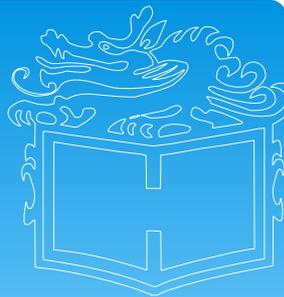
$$S_{20} = \frac{20 \times (-8 + 106)}{2} = 980.$$

你用对公式了吗?



巩固知识
典型例题

6.2 等差数列



例6 等差数列 $-13, -9, -5, -1, 3, \dots$ 的前多少项的和等于50?

解 设数列的前 n 项和是50, 由于

$$a_1 = -13, d = 3 - (-1) = 4,$$

故
$$50 = -13n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4,$$

即
$$2n^2 - 15n - 50 = 0,$$

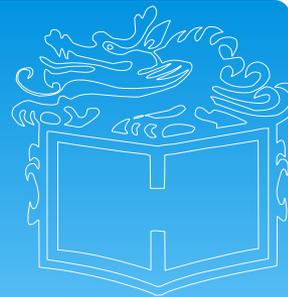
解得
$$n_1 = 10, n_2 = -\frac{5}{2} \text{ (舍去)},$$

所以, 该数列的前10项的和等于50.

巩固知识
典型例题



6.2 等差数列



运用知识
强化练习

1. 求等差数列 $1, 4, 7, 10, \dots$ 的前100项的和.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 6$, $a_9 = 26$,
求 S_{20} .

小结

1. 等差前 n 项和 S_n 公式的推导;
2. 等差前 n 项和 S_n 公式的记忆与应用;

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

说明：两个求和公式的使用-----知三求一。

3. 等差前 n 项和 S_n 公式的理解.