

☐ 宜兴高等职业技术学校☐ 宜兴技师学院☐ 宜兴开放大学☐ 宜兴市社区培训学院☒ 江苏联合职业技术学院宜兴分院

教 案（首页）

编号：YJSD/JWC—17—10

课题序号	10	授课班级	联五 221 机电
授课课时	2	授课形式	新 授
授课章节 名 称	§ 23. 4 微分中值定理与洛必达法则		
使用教具	三角板		
教学目的	1、了解拉格朗日中值定理及几何意义 2、掌握用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式极限的方法		
教学重点	用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式极限的方法		
教学难点	用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式极限的方法		
更新、补 充、删节 内 容	无		
课外作业	书本 P66 习题 2, 3		
教学后记	在使用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式极限的方法时一定要注意： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ 或无穷是前提		
授课主要内容或板书设计			
§ 23. 4 函数的微分 1、罗尔(Rolle)定理 2、拉格朗日（Lagrange） 定理 3、洛必达法则	例题 1、 例题 2、 例题 3、	练习 1、 练习 2、 练习 3、	

课 堂 教 学 安 排

教学过程	主要教学内容及步骤
学习任务目标	能力目标：1、了解拉格朗日中值定理及几何意义 2、掌握用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$未定式极限的方法 知识目标：理解拉格朗日中值定理与洛必达法则 情感目标：培养学生自主学习的能力
教学指导	一、微分中值定理 引理（费马定理）：设函数$y = f(x)$在点x_0的某邻域$\bar{U}(x_0)$内有定义，且在x_0处可导，若$\forall x \in \bar{U}(x_0)$，有 $f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0))$ 则 $f'(x_0) = 0$ 定理 1（罗尔中值定理）：设函数$y = f(x)$满足：（1）在闭区间$[a, b]$上连续；（2）在开区间(a, b)内可导；（3）$f(a) = f(b)$。则在(a, b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi) = 0$（$\xi \in (a, b)$）。 定理 2（拉格朗日中值定理）：设函数$y = f(x)$满足：（1）在闭区间$[a, b]$上连续；（2）在开区间(a, b)内可导。则在(a, b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$， $\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b)$ 推论：在区间I内，若$f'(x) \equiv 0$，则$f(x) = C$。
学习活动	定理 3（柯西中值定理）：设函数$f(x)$，$g(x)$满足如下条件： （1）在闭区间$[a, b]$上连续； （2）在开区间(a, b)内可导； （3）在开区间(a, b)内$g'(x) \neq 0$。

学习活动

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < b)$$

柯西定理 $\xrightarrow{g(x)=x}$ 拉格朗日定理 $\xrightarrow{f(a)=f(b)}$ 罗尔定理

例1. 证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 。

例2. 证明: 当 $0 < x < \pi$ 时, $\frac{\sin x}{x} > \cos x$ 。

例3. 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ($-1 \leq x \leq 1$)。

证 : 令 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$,

$$\because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

由推论知 $f(x)$ = 常数! 再由 $f(0) = \frac{\pi}{2}$, 故 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ 。

例4. 若方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x = 0$ 有一个正根 $x = x_0$,

证明方程 $a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根。

证明: 令 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x$, 在闭区间 $[0, x_0]$ 上满足罗尔定理的三个条件, 故 $f'(\xi) = 0$ ($0 < \xi < x_0$)

$$f'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_0n\xi^{n-1} + a_1(n-1)\xi^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$$

上式表明 $x = \xi$ ($0 < \xi < x_0$) 即为方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x = 0 \text{ 的根。}$$

二、洛必达法则

定理 1: 设 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$ 并满足条件:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$(2) \text{ 极限 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在或为 } \infty.$$

则:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

证明: 补充定义: 在 x_0 与 x 为端点的闭区间上, $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, $f(x), g(x)$ 满足柯西定理的三个条件, 故

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

故有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \triangleq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} \quad (\lambda > 0, n \text{ 为正整数}); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)};$$

例 2. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x \quad (n > 0);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x);$$

	$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x \sin x)^{\frac{1}{x^2}};$ 例 3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x};$ 例 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x};$ 例 5. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出。
任务训练	1、试讨论下列函数在指定区间内是否存在一点 ξ, 使 $f'(\xi) = 0$: (1) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq \frac{1}{\pi}, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ (2) $f(x) = x , -1 \leq x \leq 1.$ 2、求下列不定式极限 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$ (2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x};$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\cos x - 1};$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x};$ (5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 6}{\sec x + 5};$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$ (7) $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^{\sin x};$ (8) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$
归纳小结	1、罗尔(Rolle)定理 2、拉格朗日 (Lagrange) 定理 3、洛必达法则
课后作业	书本 P66 习题 2, 3