教　案（首页）

编号：YJSD/JWC—17—10

课题序号	10	授课班级	联五 221 幼管
授课课时	2	授课形式	新　　授
授课章节名　称	§23.4 微分中值定理与洛必达法则		
使用教具	三角板		
教学目的	1、了解拉格朗日中值定理及几何意义 2、掌握用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式极限的方法		
教学重点	用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式极限的方法		
教学难点	用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式极限的方法		
更新、补充、删节内　容	无		
课外作业	书本 P66 习题 2，3		
教学后记	在使用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式极限的方法时一定要注意： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 或无穷是前提		

授课主要内容或板书设计

§23. 4 函数的微分 1、罗尔(Rolle)定理 2、拉格朗日（Lagrange）定理 3、洛必达法则	例题 1、 例题 2、 例题 3、	练习 1、 练习 2、 练习 3、

☐宜兴高等职业技术学校　　☐宜兴技师学院　　☐宜兴开放大学
☐宜兴市社区培训学院　　☑江苏联合职业技术学院宜兴分院

课 堂 教 学 安 排

教学过程	主要教学内容及步骤
学习任务目标	能力目标：1、了解拉格朗日中值定理及几何意义 2、掌握用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$未定式极限的方法 知识目标：理解拉格朗日中值定理与洛必达法则 情感目标：培养学生自主学习的能力
教学指导 学习活动	**一、微分中值定理** 引理（费马定理）：设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域$\overline{U}(x_0)$内有定义，且在x_0处可导，若$\forall x\in\overline{U}(x_0)$，有 $f(x)\le f(x_0)$（或$f(x)\ge f(x_0)$） 则　$f'(x_0)=0$ 定理1（罗尔中值定理）：设函数$y=f(x)$满足：（1）在闭区间[a,b]上连续；（2）在开区间（a,b）内可导；（3）f(a)=f(b)。则在（a,b）内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$（$\xi\in(a,b)$）。 定理2（拉格朗日中值定理）：设函数$y=f(x)$满足：（1）在闭区间[a,b]上连续；（2）在开区间（a,b）内可导。则在（a,b）内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$， $\Rightarrow$　$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$ 推论：在区间I内，若$f'(x)\equiv 0$，则f(x)=C。 定理3（柯西中值定理）：设函数f(x)，g(x)满足如下条件： （1）　在闭区间[a,b]上连续； （2）　在开区间（a,b）内可导； （3）　在开区间（a,b）内$g'(x)\ne 0$。

学习活动	则在（a,b）内至少存在一点ξ，使得 $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad (a<\xi<b)$$ 柯西定理$\xrightarrow{g(x)=x}$拉格朗日定理$\xrightarrow{f(a)=f(b)}$罗尔定理 例1. 证明当 x>0 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。 例2. 证明：当$0<x<\pi$时，$\frac{\sin x}{x}>\cos x$。 例3. 证明$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$（$-1\le x\le 1$）。 证：令$f(x)=\arcsin x+\arccos x$， $\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$， 由推论知 f(x)=常数！再由$f(0)=\frac{\pi}{2}$，故$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$。 例4. 若方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x=0$有一个正根$x=x_0$， 证明方程$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}=0$必有一个小于$x_0$的正根。 证明：令$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x$，在闭区间$[0,x_0]$上满足罗尔定理的三个条件，故$f'(\xi)=0\ (0<\xi<x_0)$ $$f'(x)=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$$ $$\Rightarrow\quad a_0n\xi^{n-1}+a_1(n-1)\xi^{n-2}+\ldots+a_{n-1}=0$$ 上式表明$x=\xi$（$0<\xi<x_0$）即为方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x=0$的根。 二、**洛必达法则**

定理 1：设 $f(x),g(x)$在点 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$ 并满足条件：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为∞。

则：
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

证明：补充定义：在 x_0 与 x 为端点的闭区间上， $f(x_0)=0$，$g(x_0)=0$，f(x),g(x)满足柯西定理的三个条件，故

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ （ξ 介于 x_0 与 x 之间）

故有
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\overset{\Delta}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1．求下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$； （2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$（$\lambda>0$，n 为正整数）； （4） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$；

例 2．求下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to 0+} x^n\ln x$（n>0）；

（2） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$；

	（3）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$； 例 3．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}$； 例 4． $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$； 例 5．验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出。
任务训练	1、试讨论下列函数在指定区间内是否存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$： （1） $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, 0<x\le\dfrac{1}{\pi}, \\ 0, x=0; \end{cases}$　　（2）f（x）=|x|，-1≤x≤1。 2、求下列不定式极限 （1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$；　　（2） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$； （3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$；　　（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$； （5） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$；　　（6） $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$； （7） $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$；　　（8） $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$；
归纳小结	1、罗尔(Rolle)定理 2、拉格朗日（Lagrange）定理 3、洛必达法则
课后作业	书本 P66 习题 2，3