☐宜兴高等职业技术学校　☐宜兴技师学院　☐宜兴开放大学
☐宜兴市社区培训学院　☑江苏联合职业技术学院宜兴分院

教　案（首页）

编号：YJSD/JWC—17—10

课题序号	15	授课班级	联五221机电
授课课时	2	授课形式	新　　授
授课章节名　称	§23. 3函数单调性与凸性的判别法		
使用教具	三角板		
教学目的	1、理解函数的极值概念， 2、用导数判断函数的单调性和求极值的方法。 3、会用导数判断函数图形的凹凸性，会求拐点，会描述函数的图形（包括水平和铅直渐近线）。 4、会求解较简单的最大值和最小值的应用问题。		
教学重点	1、用导数判断函数的单调性和求极值的方法。 2、用导数判断函数图形的凹凸性，会求拐点，会描述函数的图形		
教学难点	1、用导数判断函数的单调性和求极值的方法。 2、用导数判断函数图形的凹凸性，会求拐点，会描述函数的图形		
更新、补充、删节内　容	无		
课外作业	书本P61 习题2，3		
教学后记	会用导数判断函数图形的凹凸性，会求拐点，会描述函数的图形是难点，学生掌握情况不理想		

授课主要内容或板书设计

§23. 3函数单调性与凸性的判别法 一、函数单调性的判别法 二、函数的凸性及其判别法 三、函数的极值及其求法	例题1、 例题2、 例题3、	练习1、 练习2、 练习3、

课 堂 教 学 安 排

教学过程	主要教学内容及步骤
学习任务目标	能力目标：1、用导数判断函数的单调性和求极值的方法。 2、会用导数判断函数图形的凹凸性，会求拐点，会描述函数的图形（包括水平和铅直渐近线）。 3、会求解较简单的最大值和最小值的应用问题。 知识目标：理解函数的极值概念 情感目标：培养学生自主学习的能力
教学指导 学习活动	**（一）函数单调性与凸性的判别法** **一、函数单调性的判别法** 从直观观察可得到结果； 用拉氏中值定理可证明结果； 函数单调性的判别法：设函数 $f\in[a,b]$，且 $f\in D(a,b)$ （1）若 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)>0$，则 f(x)在[a,b]上单调增加； （2）若 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)<0$，则 f(x)在[a,b]上单调减少。 例 1．判定下列函数在指定区间上的单调性： （1） $f(x)=x-\sin x$，$[0,2\pi]$； （2） $y=e^x-x-1$，（$-\infty$，$+\infty$）； 例 2．确定函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间； 例 3．证明：当 x>1 时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$； **二、函数的凸性及其判别法** 函数的凸性在近代分析与优化两大领域中具有重要作用。 设函数 $y=f(x)$的图形如右，曲线是凹的。 $\forall x_1,x_2$（$x_1\neq x_2$），其中任一点为 $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$（$0<\lambda<1$）， 弦 AB 的方程为 $$y-f(x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)$$

学习活动

$$y=(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$$

定义（凸函数）：设函数 f(x)在区间 I 内有定义，$\forall x_1,x_2\in I$（$x_1\neq x_2$），且对任一$\lambda\in(0,1)$，总有

$$f[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]<(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$$

则称函数 f(x)在 I 内是凸的（凸函数）；反之，为凹的（凹函数）

如果 f(x)之在点（$x_0,f(x_0)$）改变了凸性，称该点为拐点。

函数凸性的判别法 1：设 $f\in D(I)$，且导函数 *f'*(x)在 I 内单调增加（减少），那么函数 *f*(x)在 I 内是凸（凹）的。

函数凸性的判别法 2：设 $f(x)\in D^2(I)$，$\forall x\in I$，若 *f*''(x)>0，则函数 *f*(x)在 I 内是凸的，其图形在 I 内是凹的！

例 4．讨论下列函数的凸性：　（1）$y=x^3$；　（2）$y=\sqrt[3]{x}$；

例 5．讨论函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的凸性。

解：定义域：（$-\infty,+\infty$），$f'(x)=2\sqrt[3]{x^2}+(2x-5)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$

$$f''(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-(x-1)(1+\frac{1}{3})x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{10}{9}\cdot\frac{2x+1}{x\sqrt[3]{x}}$$

当 x=0 时，f'(x)不存在，f''(x)不存在；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，f''(x)=0。

列表讨论：

X	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},0)$	0	（0，1）		$(1,+\infty)$
f'(x)	+	+	+	存在	-		+
f''(x)	-	0	+	在	+		+

f(x)	↗	拐点	↗		↘	极值	↗

例 6．讨论函数 $y=\ln x$ 的凸性，当 $0<\lambda<1$ 时，a,b 为任意的实数，

证明：$a^{1-\lambda}b^{\lambda}\le(1-\lambda)a+\lambda b$

解：（1）$y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$，在定义域（0，+∞）内，y”=0，故 y=lnx 是凹函数（图形是凸的）

（2）由凹函数的定义

$$(1-\lambda)\ln a+\lambda\ln b<\ln[(1-\lambda)a+\lambda b]$$

$$e^{(1-\lambda)\ln a+\lambda\ln b}<e^{\ln[(1-\lambda)a+b]}\quad\Rightarrow\quad e^{\ln(a^{1-\lambda})b^{\lambda})}<e^{\ln[(1-\lambda)a+\lambda b]}$$

证毕。

（二）函数的极值与最值

一、函数的极值及其求法

$$\text{极值}\begin{cases}\text{极大值}——\text{极大值点}\\\text{极小值}——\text{极小值点}\end{cases}，\text{最值}\begin{cases}\text{最大值}——\text{最大值点}\\\text{最小值}——\text{最小值点}\end{cases}$$

$$\text{可疑极值点}\begin{cases}\text{驻点}\\\text{不可导点}\end{cases}$$

定理 1（第一充分条件）：设函数 f(x)在点 x_0 处连续，在点 x_0 的某去心邻域可导。

1．若点 x_0 的左右两侧，导数变号，则点 x_0 为极值点；

2．若点 x_0 的左右两侧，导数不变号，则点 x_0 不是极值点。

进一步，导数从+变为－，x_0 为极大值点；从－变为+ x_0 为极小值点。

例 1．求函数 $y=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值；

例 2．求函数 $y=x^2(x^4-3x^2+3)$ 的极值；

解：

$$f'(x)=2x(x^4-3x^2+3)+x^2(4x^3-6x)=2x(x^4-3x^2+3+2x^4-3x^2)$$

$$=6x(x^4-2x^2+1)=6x(x^2-1)^2$$

令 f’(x)=0，驻点为 x=0,x=1,x=-1。

例 3．求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值。

二、最大值与最小值问题

例 4．求函数 $f(x)=e^{-x}(x+1)$ 在[1，3]上的最大值、最小值；

解：由例 3 知 f(-1)=10，f(3)=-22，再求出 f(-2)=3，f(4)=-15，比较可得出最大值与最小值。

例 5．AB=100km，AC=20km 且 $AC\perp AB$，选择点 D，公路与铁路运费之比为 3:5，使运费最省，D 去何处？

解：$y=5k\cdot CD+3k\cdot DB=5k\cdot\sqrt{400+x^2}+3k(100-x)$（$0\le x\le 100$）

$y'=k(\dfrac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3)$　$\Rightarrow$ 令 y’=0，得 x=15（唯一驻点）

且　$y|_{x=0}=400k$，$y|_{x=15}=380k$，$y|_{x=100}=500k\sqrt{1+\dfrac{1}{25}}$

例 6．已知平面曲线 L 的方程为 $(x^2+y^2)^2=8x$，考虑把 L 围在内部且各边平行于坐标轴的矩形，试求这些矩形的面积的最小值；

解：虽然，L 通过原点（0，0），关于 x 轴对称，且位于右半平面（$x\ge 0$）上，易求出 L 与 x 轴的另一个交点为 x=2，即（2，0）。

为求把 L 围在内部，且各边平行于坐标轴的矩形面积的最小值，可转化为求函数

$$y=\sqrt{\sqrt{8x}-x^2}\quad（0\le x\le 2）$$

的最大值。

令 $y'=0$，得 $x=2^{-\frac{1}{3}}$（驻点唯一）——最大值点

$$y|_{x=2^{-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}\sqrt[6]{432}\ （最大值）$$

于是所求矩形一边长的最小值为 2，另一边长最小值为 $2y=\sqrt[6]{432}$，故矩形面积的啊小值为 $S_{\min}=2\sqrt[6]{432}$

任务训练	一、求 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $\frac{1}{4}\le x\le 1$ 上的最大值和最小值； 二、确定函数 $y=\cos 2x-2x$ 的单调区间； 三、求曲线 $y=x^2+\cos x$ 的凹凸区间；
归纳小结	一、函数单调性的判别法 二、函数的凸性及其判别法 三、函数的极值及其求法
课后作业	书本 P61 习题 2，3