文 | 纪美玲　吴文娟

“以不变应万变”

——等积变形的解题策略

计算几何图形的面积是小学几何教学中一块重要的内容，但在实际教学中经常会遇到求不规则图形或缺少条件的规则图形的面积的问题，这些求图形面积的问题常让学生束手无策。利用等积变形，以“不变应万变”，往往能巧妙解决看似毫无头绪的问题。但如何识别、构造、利用等积图形呢？

首先要知道两个基本概念：1.等积图形：即面积相等的图形；2.等积变形：即仅仅使其形状改变，面积不变。其次，在小学阶段等积变形的知识基础是基本图形（长方形、正方形、三角形、梯形、平行四边形、圆）的面积计算方法和由此产生的一些推论。在这里我主要谈谈如何运用三角形的面积计算来等积变形，巧解图形面积问题。

一、直接应用

如图1，小正方形的面积是2平方厘米，求阴影部分的面积。

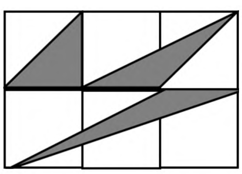

图 1

分析：三角形的面积=底×高÷2，如果两个三角形底和高分别相等，那这两个三角形面积就相等。这三个三角形尽管形状不同，但它们底和高分别相等。学生如果能看出，就能很容易地求出阴影部分的面积是 2×2÷2×3=6（平方厘米）。

二、添加辅助线

如图2，已知三角形 ABC 的面积是60平方厘米，是平行四边形 $EFCG$ 的2倍，求阴影部分的面积。

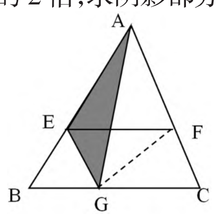

图 2

分析：本题中的阴影部分是一个三角形，如何构造与这个阴影部分面积相等的三角形，又要与可以求出面积的平行四边形有联系呢？利用在一组平行线之间高相等的知识，添加辅助线 FG，三角形 EFG 与三角形 AEG 同底（EG）等高，面积相等。所以阴影部分的面积=60÷2÷2=15（平方厘米）。当题中不能直接看出等底等高三角形时，利用已知的平行线或相等的线段，添加辅助线来构造出面积相等的三角形。

三、分割后等积

如图3，E、F 分别是长方形 $ABCD$ 的边 AD、DC 的中点，图中三角形 BEF 的面积是15平方分米，求长方形 $ABCD$ 的面积是多少平方分米？

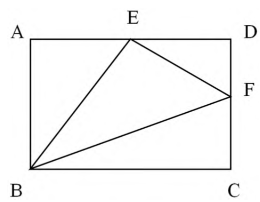

图 3

分析：本题可以将整个长方形看作单位“1”，计算出三角形 AEB、EDF、BFC 分别是长方形的 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{4}$，所以三角形 EFB 的面积是长方形的 $\frac{3}{8}$，长方形的面积是 $15\div\frac{3}{8}$=40（平方分米）。其实本题也可以通过分割图形，利用等积变形直观地看出三角形 EBF 与长方形 $ABCD$ 的比率。

如图4所示，因为 E、F 分别是长方形 AD、DC 边上的中点，将长方形8等分。连接 GD，三角形

EGF 与三角形 GDF同底等高，面积相等；连接 GC，三角形 GBF 与三角形 GCF 同底等高，面积相等。所以三角形 EFB 的面积与三角形 GDC 的面积相等，都是占长方形面积的$\frac{3}{8}$，求出长方形的面积是 $15\div\frac{3}{8}=40$(平方分米)。

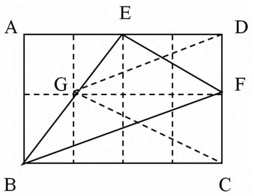

图 4

利用题中的已有等分信息，将大三角形分割成多个小三角形，通过小三角形的等积变换，最终将大三角形转化成另一个与之面积相等的图形。

四、相加等积

如图 5，ABCD 是一个长方形，三角形 PAB、PBC 和 PCD 的面积分别是 44 平方厘米、144 平方厘米和 260 平方厘米。图中阴影部分的面积是多少平方厘米？

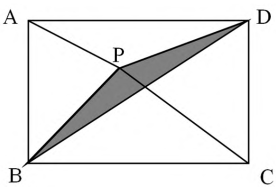

图 5

分析：三角形 ABD 和三角形 BCD 的面积相等，都是长方形面积的一半，但 P 点在长方形的内部，将长方形分成了 4 个大小不同的三角形，虽然这 4 个三角形面积不相等，但观察后发现三角形 APD、BPC 底相等，而高合起来正好是长方形的宽。设长方形的长是 a，宽是 b，三角形 APD 底 AD 上的高是 h_1，三角形 BPC 底 BC 上的高是 h_2，那三角形 APD 与 BPC 面积之和$=\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2=\frac{1}{2}a(h_1+h_2)=\frac{1}{2}ab$=长方形的面积的一半，同理可求三角形 APB 与 DPC 的面积之和也是长方形面积的一半。发现了这一重要的等积关系，解决这个问题就非常容易了，以后可以直接利用刚才证明所得的结论来解题。长方形面积的一半=44+260=304(平方厘米)，阴影部分的面积等于三角形 PBC 与 PCD 的面积之和减去三角形 BDC 的面积，即 144+260−304=100(平方厘米)。

我们观察等积图形时，往往只注重单个图形之间的面积相等，有时把几个图形合起来常常会和另外几个图形的面积组合相等。

五、相减等积

如图 6，长方形 ABCD 中 BC 长 6 厘米，FG 长 4 厘米，求阴影部分的面积。

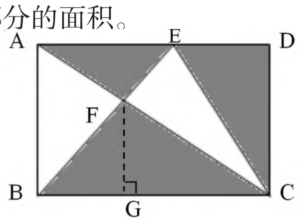

图 6

分析：看上去毫无头绪的一题用相减等积来解决就非常容易了。根据三角形面积是与它等底等高平行四边形(或长方形)面积的一半可知三角形 EBC 与三角形 ACD 面积都是长方形面积的一半，因此面积相等，同时减去三角形 EFC 的面积，剩下的三角形 AFE 与三角形 ECD 的面积之和与三角形 FBC 的面积相等。所以阴影部分的面积等于 6×4÷2×2=24(平方厘米)。

巧妙地利用等积的图形共同减去同一个图形（或等积的图形），剩下的面积仍相等，这个结论非常重要，而且还能产生与此相类似的其他推论：如甲乙两个图形原来面积相差 a，同时减去(或加上)面积相等部分，所得图形的面积仍然相差 a。如图 7，如果甲阴影部分的面积比乙阴影部分的面积多 28 平方厘米，那么甲的面积+丙的面积=半圆的面积，乙的面积+丙的面积=三角形的面积，所以半圆的面积比三角形的面积就多 28 平方厘米。反之，由半圆面积和三角形面积的差，也可以推出甲面积与乙面积的差。这个结论看似面积变了，不再是等积变形，但实际与等积变形有着异曲同工之妙。

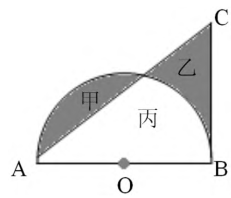

图 7

利用三角形等积变形的知识来解决图形面积问题，灵活多样，变化复杂，但无论题目怎样变化，万变不离其宗，只要我们善于观察、把握图形特点，紧紧抓住题中的“不变”——不变的面积或不变的关系，想办法构建等积图形，往往能巧妙解决问题。

【本文系江苏省教育科学“十四五”规划苏教名家专项课题《核心问题导向的小学数学单元整体教学实践研究》(课题编号:SJMJ/2023/07)的阶段性成果之一】

(作者单位:江苏省宜兴市第二实验小学/宜兴市东氿小学)

责任编辑 王晓静