

# 我不喜欢这样的教学

潘静

某次见了一本很有名的杂志登载的《 $y = \sin x$  的周期性》教学设计，老师在讲完周期性概念后就让学生辨析  $y = \sin x (x \in [0, 4\pi])$  和  $y = \sin x (x \neq 0)$  是不是周期函数，而且重点讲解（见截图）。说实话，我不喜欢这样的教学（仅仅是个人态度，“我不喜欢”不影响其他人喜欢，更不说明我是对的别人是错的）。下面做几点讨论，欢迎争鸣。

## 首先，我们应该怎样看待知识

作为知识，周期函数是刻画现实世界中周期现象的工具。但“周期函数本身”不在现实世界中，它是我们头脑构造的抽象物。说穿了，我们在头脑中建立起一个图式，当自然界相应事物出现的时候，我们用这个图式去刻画它或解释它，这个图式就成了我们的知识。教学的任务就是让学生形成这样的图式，并用之于世界。比如“角”，我们在头脑中建立了角的图式——“从同一顶点出发的两条射线”——当三角形出现在我们面前的时候，我们立刻把这个图式匹配上去，说那里面有“三个角”。

我开头所说的那个教学，是希望建立一个完备的、严谨的知识。作者汲汲于“定义”的辨析，尽管辨析都是对的，所收获的也仅仅是琐碎、僵硬的“知识”，它离“世界”太远了，起不了“图式”的作用。如果用这样的观点来看，三角形中根本就没有角。为什么？因为三角形中的边都是线段而不是射线，不符合“角”的定义（按定义，角的两边都是射线，课无限延长）。请问：这样的“知识”还有用吗？这样的教学还能促进人的发展吗？

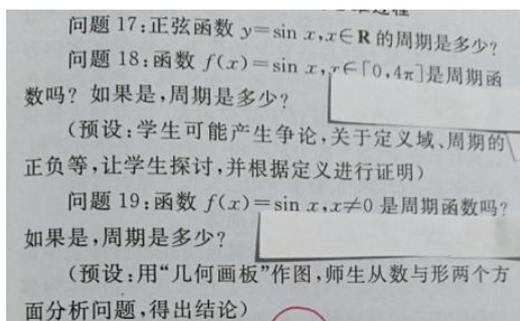
对于周期函数，我希望的教学是把三角函数的周期性理解清楚，能形成  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  形式的表达，并抽象出  $f(x + T) = f(x)$  这种一般意义。在此之后，能用它来刻画风车、摩天轮、四季、星期、年月日等循环重复的运动。

在做到这些之前，不要先说非周期函数，更不能主要精力花“不是周期函数”上。也许你会说，判断必须有正反，否则就不是辨析。这个观点我认可，但是你认为在正确的观念形成之前，能通过反面例子来促使它形成吗？在教“马”概念的时候，你不能先把驴子牵来，说“这不是马”，而应该先把马牵来让人熟悉一下。

作为头脑中的图式， $y = \sin x$  定义在实数集上，这是最理想的状态，现实中的每一个周期现象都不可能是这么理想的。我说“ $y = \sin x (x \in [0, 4\pi])$  经过了两个周期”，估计你不会反对，就象说一个三角形中某个角的两边长是 4cm 和 6cm 一样；一个活了 85 岁的人，我说他“历经 85 次寒来暑往”你也应当是同意的，其实他的每一年都和其他年份不一样；行星的公转轨道不是一条封闭的空中曲线，因为一周后它回不到当初的起始点（这就是行星的进动现象，它是爱因斯坦相对论的三大证据之一），至于行星是不是会这样运行到永远（时间到无穷大），我们也不知道……所有这些东西都“不符合定义”，但不妨碍我们用定义来刻画它们。

## 其次，我们应该怎样看待教学

概念教学是教学的核心工作，也应该是教学研究的重中之重。概念包含四个要素：实例、



特征、意义、符号。反面例子肯定不是“实例”，要利用它就必须有利于对“特征”、“意义”的认识。很遗憾， $y = \sin x(x \in [0, 4\pi])$ 和 $y = \sin x(x \neq 0)$ 所涉及的都不是本质特征，在“非本质特征”里也算是细枝末节、无足轻重。这两个例子甚至干扰了周期性概念的顺利生成，干扰了教学。

我个人认为，在抽象出 $f(x+T) = f(x)$ 这种一般意义以后，应该接着去应用它，而不是去“辨析”它。在应用中学会辨析，比在字面上的“扣”更有效。“对知识进行思考，得到的是关于知识的认识；对现象进行思考，得到的是关于世界的认识”。

不知大家注意到没有，在学习三角函数之前，学生面对“春夏秋冬”、“潮涨潮落”、“行星运动”时，还能自如地说出“周期性”这个词。在学习三角函数以后，他们反而不敢说了。在提到“周期”时，他们反映出的就只是“ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ”，而有的人一辈子都不知道这里的 $\omega$ 指的是什么（注：风车的角速度）。那些鲜活的、实在的、对世界的认识，都没有了，反而变成了干巴巴的、死气沉沉的、对僵化知识的记忆。

我们究竟对孩子做了些什么？我们都在兢兢业业、呕心沥血、挑灯夜战，可是我们在消耗自己的同时也在消耗学生。原本鲜活的、朝气蓬勃的生命，在我们碎碎叨叨、一丝不苟、“严谨化规范化标准化满分化”的严苛要求中，变成了塌肩驼背、目光暗淡、眼神游移、不自信、不坚定、没有勇气、没有想象力的“少年老头”。老师无限制地对“严谨性”加码，使得学生不敢说、不敢动，动辄犯错，只有唯唯诺诺亦步亦趋。请问，我们把下一代引向了怎样的一条道路？这样的人除了“听话”外，还有可能去开拓创新吗？

#### 再次，我们应该怎样看待学生

学生是人不是机器，他们的学习是能动的不是机械的，每一次学习都是一次创造。于是下面的结论很明白：

第一，所有的“创造”都与直觉有关，承认和利用学生的经验与直觉就应该是自然的，一味地用逻辑来思考，是本末倒置。虽然不能把逻辑和直觉截然分开，但就创造性而言，逻辑主要是在直觉发明接近完成的时候用于证明的。

第二，一个人对要更新头脑里认知图式，首先要过“心理安全”这一关。思维首先是情感的萌动，然后是直觉的调动，最后才是逻辑的检验，意识就这样从深层渐至浅表，而不是从浅表渐至深层（对事物的看法则是从浅表渐至深层）。

在学生用“周期性”三字描述“春夏秋冬”、“潮涨潮落”、“行星运动”等的时候，用的是直觉，心情是轻松而愉快的；在他们用定义判断 $y = \sin x(x \in [0, 4\pi])$ 和 $y = \sin x(x \neq 0)$ 周期性的时候，用的是逻辑，心情是严肃而迟缓的。

那么，是不是主张不进行这种判断，不进行学术规范化的训练？不是的，要结合学生的身心发展和认识的阶段性规律。在概念的正面形象确立以后，新概念就可以成为头脑里“直观”的东西，周期性就实现由“表象的直观”到“概念的直观”的升华。在那个时候再来判断 $y = \sin x(x \in [0, 4\pi])$ 和 $y = \sin x(x \neq 0)$ 是不是周期函数，就没有心理上的抗拒了，那就和看待“潮起潮落”差不多。就以我们老师自己来说，在判断 $y = \sin x(x \in [0, 4\pi])$ 和 $y = \sin x(x \neq 0)$ 周期性的时候，基本不需要投入心智，因而我们做这种题目觉得很轻松和愉快——但不要以为学生也这样。

过早地要求严谨化，过分严苛的逻辑训练，会带给人心理上的伤害。因为不能自由地做判断，他们就必须“揣摩评分标准”，在学校里形成这种习惯以后，到社会上就去“揣摩他人意图”，从而失去创造力，失去对生活的美好体验，这不是我所希望给予下一代的。

### 又再次，怎样看待学生的发展

核心素养教育宗旨在于培养“全面发展的人”，“全面”二字能不能达成我不敢保证，那要看学生的潜质；后面的那个“人”字让我心头一热，这个立马就能实现。把教育的立足点放在“人”身上，为了人的发展而不是把人当附庸、当工具，只要有起码的良知立刻就能做到。

再说“发展”，这是相对于过去状态或者现实状态而言的吧。我认为应该用先进的观念来影响学生，并让他们形成先进的观念。就算是知识教学，也应当教授先进的、有发展前景的知识。那些落后的观念、陈旧的知识，不能作为我们教学的选项，更不能给它们贴上“文化”的标签让数百、数千年前的僵尸在少年儿童身上还魂。

就以周期性而言，它从来就不是一成不变的知识。我们建立了周期函数的模型，自然界中有类似的现象时，就用来描述它。我们是主人，知识是工具，世界是被认识的客体，仅此而已，所有知识都不是不可动摇的天条。我们所说的真理，不过是目前还没有发现反例的一个命题而已。 $y = \sin x$  是定义在无穷区域  $R$  上的，那是理想的也可以说具有永恒意义的。

但当将其用于实际的时候，一定是具体的、局部的。就像角的定义用射线，射线可以无限长，而实际上“边长无穷大”的角并不在现实世界中（宇宙的直径也只有 138 亿光年）。初中老师没有让我们去辨析“什么是角”，而只让我们去“认识角”，你可以说这“不严谨”，但这对我们来说是好事不是坏事。高中时，我们又放弃了“同一定点出发的两条射线”，改用“旋转”来定义角，这不是很好吗？

从周期性概念的发展史，我们更可以看到应该怎样对待它。仅仅在三、四年以后（到了大学理科），学生就会接触到有限区间上函数的“周期性延拓”、把所有函数表示成周期函数（傅立叶级数）、在复变函数里也认识了对数函数  $u = \lg z$  是周期函数，等等。历史上也没有

哪个数学家因为研究“ $y = \sin x (x \neq 0)$  是不是周期函数”这种问题而被称道，相反欧拉在没

有一丁点证明的情况下把  $\sin x$  展开成无穷多项式（乘积式）而得到了无穷级数

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

的和，广受赞誉。十七世纪之前，用直觉去创造数学是常态，只是此后数学被严谨化了（先有极限的  $\varepsilon - \delta$  定义从极限直觉的改造，后有有了“数理逻辑”对逻辑的改造）。被翻译到中国来的恰恰都是严谨化后的数学，我们便以为数学本来就是这个样子，不这样似乎就不足以称为数学了。在教学中对严谨性的加码，与老师们所受的训练有直接关系，甚至有人认为严谨性是第一重要的（某些省份高考的评卷标准强化了这一点）。

在高中“判断  $y = \sin x (x \in [0, 4\pi])$  和  $y = \sin x (x \neq 0)$  周期性”这种题目，有价值吗？我还见到小学教师反复强调“这个是乘数、这个是被乘数，千万不要搞错哦！”在学过乘法交换律后，他们的“呕心沥血”是不是值得？学生花一样的年华，被消耗在复辨析“什么是乘数、什么是被乘数”上，应该吗？如果你说这是考试的需要，那么我们能不能不考（或者呼吁不考）这样的内容？

康托尔说：“数学的本质在于它的自由”，死扣字眼的教学让我讨厌。数学的“严谨性”不是最重要的，它的“抽象性”以及“应用的广泛性”都比它重要。至于研究数学，它的自

由和创造才最重要。在进行严谨性修饰的时候，创造性工作已经结束了。我们不去追逐创造时的鲜活灵动、昂扬进取，只对高潮后星星点点的修饰工作着迷，这培养不出创造精神和创新能力。

### **最后，我们应该怎样看待自己**

推荐史宁中教授总结的“三个会”，即：“会用数学的眼光观察世界，会用数学的思维思考世界，会用数学的语言表达世界”，这里有学习的手段也有学习的目的。

教什么永远比怎么教更重要，老师必须与时俱进。但是，绝不可以被外面的风刮得晕头转向。“世界的流变性，知识的永恒性”，我们去追求永恒的知识用来应付流变的世界，但对“永恒”二字必须保持警惕。只有死去的才是永恒的，活着的人身上一切都在流变之中。

教师的角色决定了我们必须有“关于知识的知识”，更要有“关于人的知识”。从数学文化乃至人类文化发展史中，我们获取营养，增长教学的智慧。

### **附注**

1 木匠在做桌子的时候，不知道什么叫“桌子”，但他知道自己做的就是桌子。这个时候也许正有一个人在某个角落里思考“什么是桌子”，但他可能一辈子也不会去做出一张桌子来，他就是哲学家。木匠和哲学家，人类都需要（但哲学家只是极少数人，因此更显宝贵）。我们肯定不能对所有学生进行超过天才哲学家的训练，不需要也无可能。即便是哲学家，也不应当去思考“一张有破洞的桌子究竟还是不是桌子”；即便他作这样的思考，也应当主要看“桌子”而不是主要看“破洞”。

2 信息不是知识，对信息的解释才是知识；知识不是力量，对知识的运用才是力量。

3 对知识的崇拜不仅数学有，其他学科也有，数学科也不是最厉害的。某些人对一个字的读音计较到疯狂的程度；一个人被称为国学大师，仅仅因为他认识的字多、读的古文献多，实则没有任何自己的思想，不能对当代社会提出任何一点建设性意见，青灯黄卷，形如枯木。这样的“大师”可以有但不需要很多，如果以他们为目标实施常态化教学，那是害人害己，这样的教学“专家”可以休矣。