



6.3.3等比数列的性质



问题探究

1.如果 x , G , y 是等比数列, 那么称 G 为 x 与 y 的等比中项.如何用 x 和 y 表示 G ?

2.等比数列 a_n 的通项公 $a_n = 2^n$, 试求 $a_3 \cdot a_{10}$, $a_5 \cdot a_8$, $a_6 \cdot a_7$. 你有什么发现?

3.等比数列 $\{a_n\}$ 中, 如果项的序号 m , n , s , t 满足 $m+n=s+t$,
那么 $a_m \cdot a_n$ 与 $a_s \cdot a_t$ 之间有什么关系?



问题探究

对于问题1, 如果 x , G , y 三个数成等比数列, 根据等比数列的定义可知, $\frac{G}{x} = \frac{y}{G}$, 因此 $G^2 = x \cdot y$, $G = \pm\sqrt{x \cdot y}$, 即等比中项 G 是它前后两项 x 与 y 积的平方根.

对于问题2, 根据等比数列通项公式求出 $a_3 \cdot a_{10}$, $a_5 \cdot a_8$, $a_6 \cdot a_7$, 且 $a_3 \cdot a_{10} = a_5 \cdot a_8 = a_6 \cdot a_7 = 2^{13}$, 不难发现, 它们的下标(即项的序号)和也相等, 即 $3+10=5+8=6+7=13$.

对于问题3, 由等比数列通项公式, $a_m \cdot a_n = a_1 \cdot q^{m-1} a_1 \cdot q^{n-1} = a_1^2 \cdot q^{m+n-2}$, $a_s \cdot a_t = a_1 \cdot q^{s-1} a_1 \cdot q^{t-1} = a_1^2 \cdot q^{s+t-2}$, 因为 $m+n=s+t$, 所以 $a_m \cdot a_n = a_s \cdot a_t$



抽象概括

一般地，对于等比数列 $\{a_n\}$ ，有如下结论：

(1) 除去首末两项，其他任意一项都是它前后两项的等比中项，即

$$a_n = \pm \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \quad n \geq 2$$

注意：等比数列的等比中项有两个，且互为相反数。

(2) 如果项的序号 m, n, s, t 满足 $m+n=s+t$ ，那么 $a_m \cdot a_n = a_s \cdot a_t$ 。





例题讲析

例6 求出下列等比数列中的未知项:

(1) $\frac{1}{4}$, G , 16 ;

(2) $2 - \sqrt{3}$, x , $2 + \sqrt{3}$.

例7 已知等比数列首项为3, 公比为2.

(1) 将这个数列中的每一项都乘以5, 所得的新数列是等比数列吗? 如果是等比数列, 它的首项和公比分别是多少?

(2) 将这个数列中的所有奇数项按原来的顺序所组成的新的数列, 这个新的数列是等比数列吗? 如果是等比数列, 它的首项和公比分别是多少?

由例7可以看出, 等比数列中的每一项乘以同一个非零常数, 所得数列仍然是等比数列; 等比数列中, 间隔相同的项构成的数列仍然是等比数列。



例题讲析

例8 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 \cdot a_7 = \frac{5}{2}$, 试求 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_8 \cdot a_9$ 的值.



课堂练习

1. 求出下列等比数列中的未知项:

(1) $4, x, 9$;

(2) $6+\sqrt{2}, y, 6-\sqrt{2}$;

(3) $1, m, 9, n$.

2. 已知两个数 $k+2$ 和 $2k-3$ 的等比中项是 k , 求 k .

3. 已知 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ 是公比为 q 的等比数列, 新数列 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ 也是等比数列吗? 如果是, 公比是多少?



课堂练习

4. 已知一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q .

(1) 将数列的前 m 项去掉, 其余各项依次构成的数列是等比数列吗? 如果是, 它的首项与公比分别为多少?

(2) 取出数列中的所有偶数项, 依次构成一个新的数列, 这个数列是等比数列吗? 如果是, 它的首项与公比分别为多少?

(3) 取出数列中所有项的序号是3的整数倍的各项, 依次构成一个新的数列, 这个数列是等比数列吗? 如果是, 它的首项与公比分别为多少?

5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 a_7 = 9$, 求 $a_2 a_8$ 及 a_5 .



课堂小结

等比数列 $\{a_n\}$

(1) 除去首末两项，其他任意一项都是它前后两项的等比中项，即

$$a_n = \pm \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \quad n \geq 2$$

(2) 如果项的序号 m, n, s, t 满足 $m+n=s+t$ ，那么 $a_m \cdot a_n = a_s \cdot a_t$.

(3) 等比数列中的每一项乘以同一个非零常数，所得数列仍然是等比数列；等比数列中，间隔相同的项构成的数列仍然是等比数列。



江苏省五年制高等职业教育公共基础课程教材《数学》（第二册）



凤凰出版传媒集团职业教育出版中心
江苏凤凰职业教育图书有限公司

Vocational Education Publishing Center, Phoenix Publishing & Media Group (PPMG)

Jiangsu Phoenix Vocational Education Books Co., Ltd.