

# “数量关系”教材内容和教学指要

侯正海 (江苏凤凰教育出版社)

《数学课程标准(2022年版)》将“数量关系”作为“数与代数”领域的一个主题,指出数量关系主要是“用符号(包括数)或含有符号的式子表达数量之间的关系或规律”。苏教版教材根据发展学生核心素养的课程目标,整体设计“数量关系”主题内容,以数量关系的分析、表达和应用为载体,着力帮助学生提高发现和提出问题、分析和解决问题的能力,逐步形成推理意识、几何直观、模型意识和初步的应用意识。

## 一、数量关系的教材内容

“数量关系”主题的内容主要包括运用数和数的运算解决问题,常见数量关系,估算,探索简单的规律,用字母或含有字母的式子表示数量之间的关系、性质和规律,比和比例,成正比的量,以及两个代数基本事实:等量的等量相等,等式的基本性质。与《数学课程标准(2011年版)》相比,“数量关系”主题的内容主要有以下几点变化:一是第二学段的“学业要求”提出“能在简单的实际情境中,运用四则混合运算解决问题”;二是第二学段要求“能发现常见数量关系,感悟利用数量关系解决问题”;三是将估算作为“数量关系”主题的内容,并在第三学段的“学业要求”中提出“能描述估算的过程”;四是第三学段要求“在具体情境中,探索用字母表示事物的关系、性质和规律的方法”,不再教学方程的认识;五是第三学段要求“通过具体情境,认识成正比的量(如 $\frac{y}{x}=5$ )”,不再认识成反比的量,并能“探索规律或变化趋势( $y=5x$ )”。苏教版教材在呈现数量关系的内容时,注意深入研究相关内容的知识本质和内在联系,在继承原有教材特色

的基础上大胆创新,凸显这一主题的教育价值。

1. 循序渐进地编排实际问题中的数量关系。

实际问题中的数量关系是学生学习数量关系的开始,也是“数量关系”主题的重点内容。教材注意紧密结合“数与运算”主题的内容,统筹规划反映典型数量关系的实际问题,循序渐进地帮助学生提高分析数量关系的能力。

(1) 结合10的认识与计算,教学用加、减法解决的简单实际问题。

用一步运算解决的简单实际问题中的数量关系是数量关系的基础。一般结合加、减法的意义教学已知两个部分数求它们的和、已知总数和一个部分数求另一部分数的实际问题,结合乘、除法的意义教学已知每份数和份数求总数、已知总数和每份数(份数)求份数(每份数)的实际问题。在求和、求剩余的实际问题教学中,通常从看图写加法或减法算式开始,并不呈现完整的实际问题作为例题。这就使得一步计算实际问题的数量关系结构不够清晰完整。苏教版教材在看图列式、看图讲故事的基础上,结合10的认识与运算编排了加法和减法的实际问题(如下图),让学生完整地认识简单实际问题的结构,感受解决实际问题的完整过程。

黄队有5人,蓝队有5人。一共有多少人?



## 试一试

一共有10人在打篮球,黄队有5人。蓝队有多少人?

求蓝队有多少人,就要从10里去掉……

$\square \bigcirc \square = \square$  (人)

口答:蓝队有( )人。

上面两题的解题方法有什么不同?为什么?

(2) 编排“简单的数量关系(一)”和“简单的数量关系(二)”,教学“相差关系”和“倍数关系”。

用一步运算解决的简单实际问题除了可以直接根据运算意义进行思考的问题之外,还包括“相差关系”和“倍数关系”等问题。相差关系的问题包括“求两数相差多少”以及“求比一个数多(或少)几的数是多少”。这些实际问题都可以通过必要的转化,再根据加减法的意义进行思考。“倍数关系”的问题包括“求一个数的几倍是多少”以及“求一个数是另一个数的几倍”。这些实际问题都可以通过必要的转化,再根据乘除法的意义进行思考。为了帮助学生形成对上述数量关系的整体认识,苏教版教材将“相差关系”和“倍数关系”的问题分别以单元形式进行编排,意在凸显这些问题与四则运算意义之间的关联,更加清晰地呈现一步计算实际问题的内容结构。

(3) 统筹编排“混合运算与数量关系”以及“数量关系的分析”单元,教学用两步及以上运算解决的实际问题。

用两步及以上运算解决的实质问题是数量关系教学的重点,也是培养学生分析和解决实际问题能力的重要载体。简单地说,用两步运算解决的实质问题是由两个一步运算的实质问题组合而成,用两

步以上运算解决的实际问题同样如此。这就使得用两步及以上运算解决的实际问题类型众多,需要在教材中合理组织、有序编排。苏教版教材统筹编排“混合运算与数量关系”以及“数量关系的分析”单元(如下表),根据分析数量关系的方法和实际问题的难易程度,将不同类型的实际问题优化组合,形成了较为合理的有关实际问题的数量关系结构。

表1 “混合运算与数量关系”“数量关系的分析”单元内容结构表

| 册次    | 单元           | 内容                                                 |
|-------|--------------|----------------------------------------------------|
| 三年级上册 | 混合运算与数量关系(一) | 两步混合运算的运算顺序;用两步混合运算解决的常见实际问题:乘加(减),除加(减),减(加)除(乘)。 |
|       | 数量关系的分析(一)   | 从条件或问题想起:连减,连续比多(少),几倍比多(少),稍复杂的求每份数(份数)。          |
| 四年级上册 | 混合运算与数量关系(二) | 三步混合运算的运算顺序,用三步混合运算解决的常见实际问题。                      |
| 四年级下册 | 数量关系的分析(二)   | 画图分析数量关系:和倍(差倍)问题,相遇问题。                            |
| 五年级下册 | 数量关系的分析(三)   | 等量代换;稍复杂的和倍问题;试验调整:鸡兔同笼问题。                         |
| 六年级上册 | 混合运算与数量关系(三) | 分数、小数四则混合运算的运算顺序;稍复杂的估算问题,稍复杂的分数乘法问题,工程问题。         |

从上述内容结构表中可以看出,教材注意将实际问题的数量关系与混合运算有机结合,帮助学生理解混合运算顺序规定的合理性,落实用混合运算解决实际问题的要求;淡化一般的解决问题策略,突出从条件或问题想起、画图整理条件与问题等分析数量关系的基本方法;整体教学从条件想起或从问题想起,不再人为分步教学;第三学段突出“等量代换”“试验调整”等使数量关系简化与具体化的方法;增加“工程问题”的教学,凸显抽象地表示数量及其关系的方法,渗透假设思想。

(4)突出对常见数量关系的概括与应用。

常见的数量关系是指实际问题中出现频率较高的数量关系。苏教版教材在三年级上册编排“加法数量关系”单元,引导学生在用两步混合运算解决实际问题的基础上抽象概括加、减法的意义,教学“总量=分量+分量”这一常见的加法数量关系,同时应用这一数量关系解决“比多(少)求和”等实际问题;在四年级上册编排“乘法数量关系”单元,引导学生抽象概括乘、除法的意义,教学“总价=单价×数量”“路程=速度×时间”这两个常见的乘法数量关系,同时应用这些数量关系解决“归一”“归总”等实际问题。

#### 2. 强化估算中的数量关系。

将估算作为“数量关系”主题的内容,意在突出在解决实际问题过程中对数量关系的分析和推理。估算主要是针对具体数量的运算,不涉及新的计算方法,只是通过对数量关系的分析将题中的数量适当加以简化,确定计算结果的范围。无论是选择合适的单位还是选择合适的方法,都需要以对数量关系的分析和相应的推理作为基础。苏教版教材先后编排五道例题教学估算(如下表),强化了估算活动中数量关系的分析,将估算的应用从简单的实际问题逐步拓展到稍复杂的实际问题。

表2 估算内容结构表

| 册次    | 单元           | 内容           |
|-------|--------------|--------------|
| 二年级下册 | 两、三位数的加法和减法  | 运用加、减法进行估算。  |
| 三年级上册 | 两、三位数乘一位数    | 用乘法进行估算。     |
|       | 两、三位数除以一位数   | 用除法进行估算。     |
| 三年级下册 | 两位数乘两位数      | 用乘法进行估算。     |
| 六年级下册 | 混合运算与数量关系(三) | 用小数四则运算进行估算。 |

#### 3. 感悟用字母表示数量关系的一般意义。

在教学分析具体问题中的数量关系、抽象概括常见数量关系的基础上,苏教版教材在第三学段安排“用字母表示数量关系(一)”和“用字母表示数量关系(二)”两个单元(如下表),进一步教学用字母表示数量关系,引导学生感悟用字母表示数量关系的一般意义。

表3 用字母表示数量关系单元内容结构表

| 册次    | 单元           | 内容                                   |
|-------|--------------|--------------------------------------|
| 五年级上册 | 用字母表示数量关系(一) | 用字母表示简单数量关系、周长和面积计算公式、变化规律和代数基本事实。   |
| 六年级上册 | 用字母表示数量关系(二) | 用字母表示稍复杂的数量关系和变化规律,简单的字母式运算,简单的代数推理。 |

从表中可以看出,用字母表示数量关系的内容是从表示简单数量关系逐步过渡到探索并表示稍复杂情境中的数学规律,从表示周长、面积计算公式和常见数量关系逐步延伸到表示代数基本事实,从用字母表示数量关系逐步拓展到能进行字母式的简单运算和推理。

#### 4. 突出探索规律活动中的数量关系。

探索规律的本质是探索变化的数量中不变的关系本质。苏教版教材重视引导学生经历探索规律的过程,从变化的角度不断丰富对数量关系的认识,发展推理意识和模型意识。第一学段重视引导学生探索简单的数与图形的排列规律,以及运算中的规律,一般以习题的形式呈现;自第二学段开始,结合相应的单元内容,设置探索规律的专题活动(如下表),引导学生由探索生活现象中的规律逐步过渡到探索数学现象、数学问题中的规律,并由探索简单的数学规律逐步过渡到探索稍复杂的数学规律。

表4 第二、三学段探索规律的专题活动

| 册次    | 主题       |
|-------|----------|
| 三年级上册 | 间隔排列     |
| 三年级下册 | 简单的周期    |
| 四年级上册 | 周长与面积的变化 |
| 四年级下册 | 图形与算式    |
| 五年级上册 | 钉子板上的多边形 |
| 五年级下册 | 表面涂色的正方体 |
| 六年级上册 | 二进制的秘密   |
| 六年级下册 | 和的奇偶性    |

## 二、数量关系的教学指要

“数量关系”主题的教学应围绕发展学生核心素养的总体目标,聚焦学生发现和提出问题、分析和解决问题能力的培

养,并在这一过程中培养学生的推理意识、几何直观、模型意识和初步的应用意识。

1. 将模型意识作为数量关系教学的主线。

理解四则运算意义是建立模型意识的基础。教学时要引导学生在结合具体情境感悟四则运算意义的基础上,逐步抽象概括四则运算的意义,明确四则运算之间的关系,完成对常见数量关系的抽象概括,形成模型意识。

理解不同数量的含义是概括常见数量关系的基础。在教学“总量=分量+分量”这一加法数量关系模型时,要结合具体情境引导学生理解总量和分量的含义,体会总量与分量之间的对应关系。也即如果一个总量有A、B两个分量,那么这里的总量就是分量A和分量B的总量,反之亦然。同时,根据加法意义,总量与分量是相对的,在某个关系中的总量有时可能是另一个关系中的分量。此外,由于加法的意义可以由两个加数推广到多个加数,所以总量的分量可能是两个,也可能是多个。在教学“总价=单价×数量”“路程=速度×时间”等乘法数量关系模型时,要着重引导学生理解“单价”和“速度”的含义,明确单价表示的是每件商品的价钱,而速度表示的是每单位时间所行的路程。

要引导学生利用常见数量关系分析和解决实际问题。在教学常见数量关系模型后,要注意引导学生综合运用常见数量关系及其变式分析和解决实际问题。在解决实际问题的过程中,数量关系的变式可能是情境变式,也可能是问题变式。例如,求比一个数多几的数是多少的实际问题也可以利用加法数量关系模型进行思考,即如:把较多的那个量看作总量,那么较少的量与相差的量就是总量的两个分量。而解决已知总量求分量的实际问题时,也可以运用加法数量关系模型,只不过需要基于模型进行逆向思考。有些实际问题会涉及不同数量关系模型的综合运用。例如解决“相遇问题”时,需综合运用“总量=分量+分量”和“路程=速度×时间”这两个数量关系模型。在教学用三步混合运算解决的实际问题和稍复杂的分数实际问题时,都要有意识地引导学生利

用常见的数量关系模型进行分析和思考,以不断增强学生的模型意识。

2. 将推理意识作为数量关系教学的核心。

推理意识是指对逻辑推理过程及其意义的初步感悟。在数量关系的教学过程中,要引导学生在发现和提出问题、分析和解决问题的过程中有条理地进行思考和交流,逐步学会有条理地思考,增强推理意识。

在分析和解决实际问题的过程中有条理地进行思考和交流。在分析用两步运算解决的实际问题的数量关系时,如果从条件想起,则应引导学生逐步学会如下的表达方式:“根据……和……,能求出……”“根据求出的……和……,能求出……”。如果从问题想起,则应引导学生逐步学会如下的表达方式:“要求……,需要知道……和……”“已经知道……,应先求出……”。通过外在的语言表达促进学生内在思维的条理化。

在用估算解决实际问题的过程中合乎逻辑地进行思考,记录自己的推理过程。例如,在教学用两位数乘一位数的估算解决问题(如下图)时,就要先根据问题判断应把两位数的乘数看大还是看小,再估算出相应的结果。

2 王叔叔去灯具商店购买一些节能灯泡。他带了120元,够买4个玉米形节能灯泡吗?



玉米形节能灯泡  
每个28元



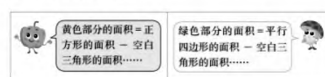
螺旋形节能灯泡  
每个32元

学生首先需要根据问题进行分析,想到要判断带的钱够不够,可以先试着把玉米形节能灯泡的价格估大一些,并用式子记录相应的思考过程,即 $28 < 30$ 。其次用看大的数进行计算,再与实际要用的钱数进行比较,即 $30 \times 4 = 120$ , $28 \times 4 < 120$ 。最后作出够不够买的判断,即如:因为买4个玉米形节能灯泡的总价一定少于120元,所以带120元够了。

尝试进行简单的代数推理。在用字母表示数量关系的教学过程中,要引导学生用字母表示两个代数基本事实“等量的等量相等”和“等式的基本性质”,并以此为主要依据进行简单的代数推理。例如,在六年级下册“用字母表示数量关系

(二)”单元中,教材编排了比较图形面积的问题(如下图)。组织教学时,可以引导学生进行如下的推理:用 $M$ 表示黄色部分的面积,用 $N$ 表示绿色部分的面积,用 $P$ 表示空白部分的面积,用 $a$ 表示正方形的边长及平行四边形的底和高。因为 $M = a^2 - P$ , $N = a^2 - P$ ,所以 $M = N$ 。经历上述过程,有助于学生感受由已知条件推出问题结论的一般过程,感受“等量的等量相等”这一基本事实的应用,发展推理意识。

4 如图,正方形的边长是 $a$ ,涂色部分分别是正方形和平行四边形的一部分。这两个部分的面积相等吗?为什么?



3. 重视发展学生的几何直观。

几何直观主要是指运用图表描述和分析问题的意识与习惯。在解决实际问题的过程中,要重视引导学生画图分析数量关系,逐步提高画图表征问题、分析数量关系的能力。第一学段引导学生学会画实物图或示意图,第二学段开始引导学生学会画线段图。教学时要引导学生将题中的信息完整地表示在图上,借助图示进行分析和思考。例如,在四年级下册“数量关系的分析(二)”单元,教材编排了两道例题,第一道例题是“和倍问题”(如下图),引导学生初步学会画线段图表示和分析问题,并利用常见的加法数量关系进行思考,直观发现总数与1份数之间的关系,从而列式解答。第二道例题是“相遇问题”(如下图),一方面引导学生继续学习画线段图表示和分析问题,另一方面启发他们利用常见的加法数量关系和乘法数量关系模型分别进行思考,在比较中感受不同解题思路的内在关联,进一步提高看图分析数量关系的水平。

1 四年级雏鹰假日小队的36名队员去火车站参加志愿服务。其中,在广场服务的人数是在站内服务人数的3倍。在广场服务和站内服务的各有多少人?

2 余小明和齐芳同时从家出发走向学校(如图),经过4分钟,两人在校门口相遇。他们两家相距多少米?



(下转第44页)

的数加以整合,帮助他们将11~19各数与10以内的数联系起来,形成相对完整的认识,进一步明确数的顺序和大小关系,发展符号意识和数感。

2. 在自主探索中明晰算理、掌握算法,发展运算能力和初步的推理意识。

例2的教学要引导学生初步感知数的加減运算要在相同数位上进行,体会简单的推理过程。基于此,组织这部分内容的教学时,一要引导学生充分展开对十几加几计算方法的探索过程,重视从“接着数数”到“分步计算”的过渡,突出“先算几个一加几个一,再把1个十和几个一合起来”这一计算方法的合理性;二要鼓励学生由不进位的十几加几的计算方法类推出不退位的十几减几的计算方法,感受相同计数单位的数才能直接相加减,加減法的计算方法具有内在的一致性。

例如,教学例2时,重点要让学生体会计算不进位的十几加几时,要用几个一加几个一,也就是要把相同计数单位的数直接相加。组织教学时,要抓住以下几个关键环节:第一,引导学生根据条件和问题列出加法算式,并解释列式的思考过程。第二,鼓励学生基于已有的加法计算经验试着计算 $13+2$ ,突出可以在13的后面接着数两个数,得到和是15,也可以根据13的组成特点想到“先算 $3+2=5$ ,再算 $10+5=15$ ”。第三,充分利用在计数器上进行的拨珠操作,帮助学生进一步明晰算理、掌握算法,体会到:因为要先算几个一加几个一,再把得到的几个一与原来的1个十合起来,所以要先算 $3+2=5$ ,再算 $10+5=15$ 。第四,引导学生联系自身的生活经

验,讲出用 $13+2$ 计算的不同故事,帮助他们感受数学知识应用的广泛性。

此外,教学“试一试”时,重点要引导学生基于对不进位的十几加几计算方法的已有认识,借助在计数器上进行的拨珠操作,类推出不退位的十几减几的计算方法,突出:因为要先算几个一减几个一,再把得到的几个一与原来的1个十合起来,所以要先算 $5-2=3$ ,再算 $10+3=13$ 。

这里,要引导学生通过具体操作以及推理活动,主动感悟不退位的十几减几是不进位的十几加几的逆运算。

3. 在真实情境中体验数与运算的实际应用,发展初步的模型意识和应用意识。

数的认识与数的运算密切相关。学生能在熟悉的生活情境中运用11~19各数和不进位的十几加几以及相应的减法运算,合理表达简单的数量关系、解决简单的实际问题是本单元教学的基本要求。因此,在组织“想想做做”和“练习八”的教学时,一方面要引导学生在不同形式的活动中进一步明确11~19各数的基本含义、组成特点、读写方法、顺序和大小,以及不进位的十几加几和不退位的十几减几的计算方法,感受数与运算的应用价值;另一方面要注意将学过的数与加減运算知识适当加以整合,启发学生感受数的概念与加減运算在本质上的一致性。

例如,教学练习八第5题时,可以先出示公交站牌,让学生看一看图片,说说图片上有什么,公交站牌上的“13”表示什么意思,然后引导学生互相说说还知道几路公共汽车以及用数区分公共汽车的路线有什么好处。接着出示停车场剩余泊位

信息牌,让学生说说图中“14”的意思,并追问:“如果停车场此时再进入一辆车,信息牌上会显示几?假如开出一辆车呢?”通过讨论使学生体会停车场剩余泊位信息牌的作用。最后出示交通信号灯显示器,让学生说说此时的“17”所表示的意思,接下来显示器上会出现哪些数?在学生充分交流的基础上,继续追问:“在你身边,你还看到过哪些地方有十几这样的数?这些数各表示什么意思?”从而引导他们用数学的眼光观察现实世界,感受数在日常生活中的广泛应用。再如,教学练习八第14题时,可以先让学生说说题中的已知条件和所求问题,再鼓励他们各自列式解答。组织交流时,重点引导学生说说选择用加法计算的依据,突出根据运算意义确定计算方法的思考过程。然后,引导学生根据题目条件和求出的问题继续编一道用减法计算的实际问题,从而感悟减法是加法的逆运算,形成初步的模型意识和应用意识。

总之,11~19各数的认识是探索不进位的十几加几和不退位的十几减几计算方法的基础,通过相关运算有助于学生更好地认识11~19各数,两者具有密切的联系。教学中,既要注重每个内容的特点,又要关注两者之间的联系,注重发挥情境设计与问题驱动对学生主动参与学习活动的促进作用,使学生在活动中逐步发展核心素养。

(责任编辑 常学莉)

(上接第38页)

教材还在四年级下册安排了“图形与算式”这一探索规律的专题活动,引导学生将图形排列与相应的算式结合起来,感悟图形与算式的联系,增强利用图形分析和解决问题的意识。

4. 增强学生的应用意识。

应用意识主要是指有意识地利用数学的概念、原理和方法解释现实世界中的现象与规律,解决现实世界中的问题。教学时要引导学生感悟现实生活中蕴含着的大量与数量和图形有关的问题,并且可以用数学的方法予以解决。例如,教学

“工程问题”时,教材呈现了真实的问题情境:“志杰家要平整一块菜地,并给这块菜地围上篱笆。如果这项工作由志杰单独做,需要6小时完成;如果由爸爸单独做,需要3小时完成。如果志杰和爸爸一起做,多少小时可以完成?”学生在分析问题时会意识到:由于不知道这块菜地的具体数量信息,所以解决问题时存在一定困难。接着,通过进一步的思考和交流逐步认识到:可以把工作总量看作“1”,并用几分之一分别表示志杰和爸爸每小时的工作效率,从而使问题得到解决。呈现真实

情境中的真实问题,有利于学生经历把生活问题转化为数学问题的过程,并在应用数学知识和方法进行分析后,回到具体情境中检验答案的合理性,从而增强应用意识。

(责任编辑 常学莉)