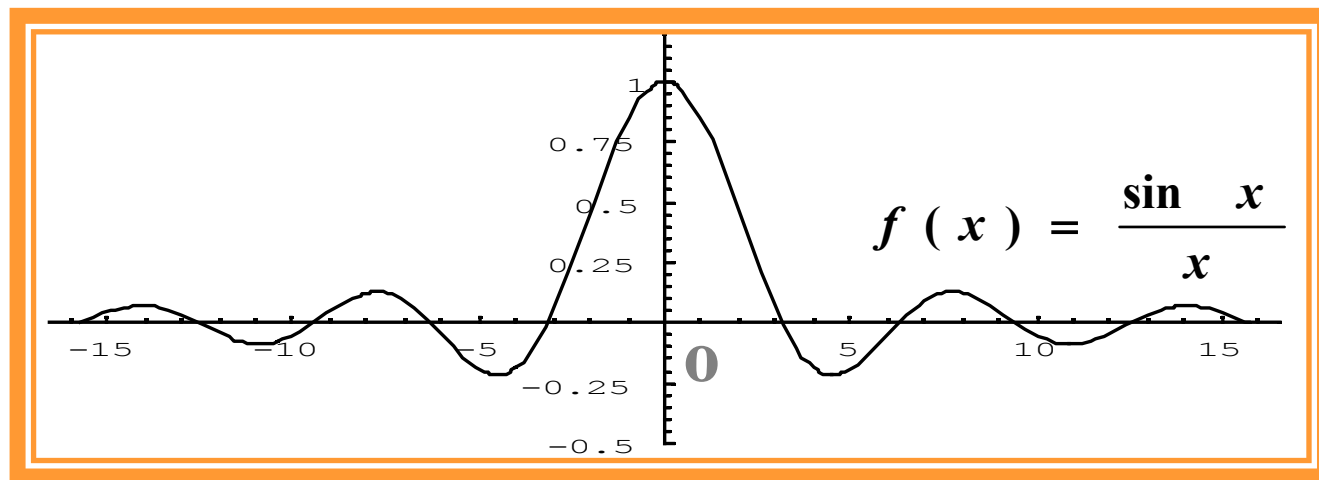




22.2.2两个重要极限 (一)

两个重要极限（一）

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



两个重要极限（一）

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} (\text{令 } t = 2x)$

$$= 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$$

两个重要极限（一）

归纳：

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

类型是 $\frac{0}{0}$ 型；



$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

两个重要极限（一）

练习1：求下列函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

两个重要极限（一）

辩一辩：

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \underline{1} ;$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \underline{0} ;$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \underline{1} ;$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \underline{0} ;$$

两个重要极限（一）

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\ &= 2\end{aligned}$$

两个重要极限（一）

练习2： 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \cdot \sin \frac{1}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \frac{4}{3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

两个重要极限（一）

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x \cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ &= 1\end{aligned}$$

两个重要极限（一）

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$$

两个重要极限（一）

练习3： 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x - 3} = 6$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = 0$$

两个重要极限（一）

小结：. 两个重要极限（一）

$$(1) \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1 \quad \text{类型是 } \frac{0}{0} \text{ 型};$$

$$(2) \text{结论: } \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin a \square}{b \square} = \frac{a}{b}$$

$$(3) \text{结论: } \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\tan \square}{\square} = 1$$

注: $\square$ 代表相同的表达式