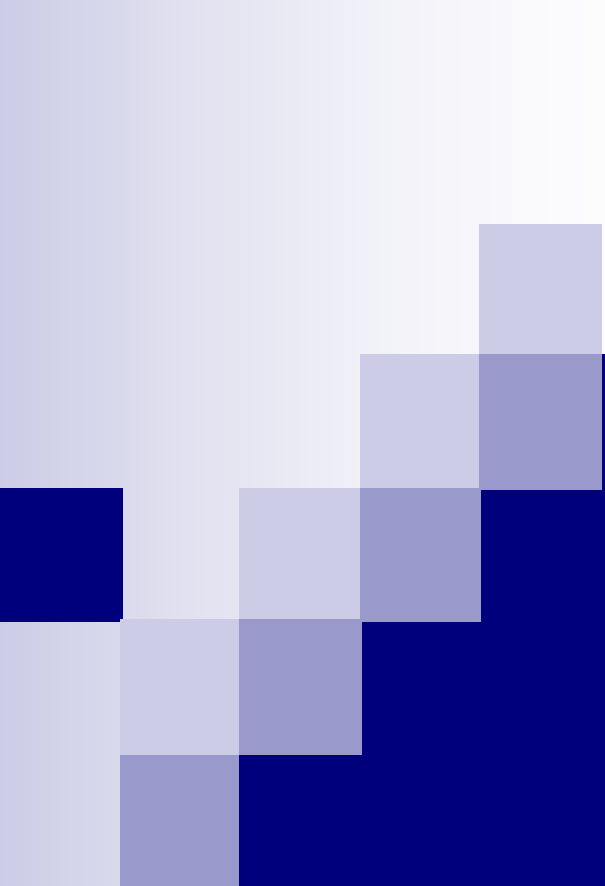


问题引入：某班喜欢英语学科的有36人，喜欢数学学科的有38人，两门学科都喜欢的有30人，两门学科都不喜欢的有4人，该班共有多少人？



1.1.3 集合的基本运算 (1)

观察与思考：

考察下面的问题，集合 C 与集合 A 、 B 之间有什么关系吗？

(1) $A = \{x | x \text{ 是24级机电系的男生} \}$ ，

$B = \{x | x \text{ 是24级机电系的共青团员} \}$ ，

$C = \{x | x \text{ 是24机电系的男共青团员} \}$ 。

(2) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ， $B = \{2, 3, 5, 8, 12\}$ ，
 $C = \{2, 8\}$ 。

集合 C 是由那些既属于集合 A 且又属于集合 B 的所有元素组成的。

一、交集概念

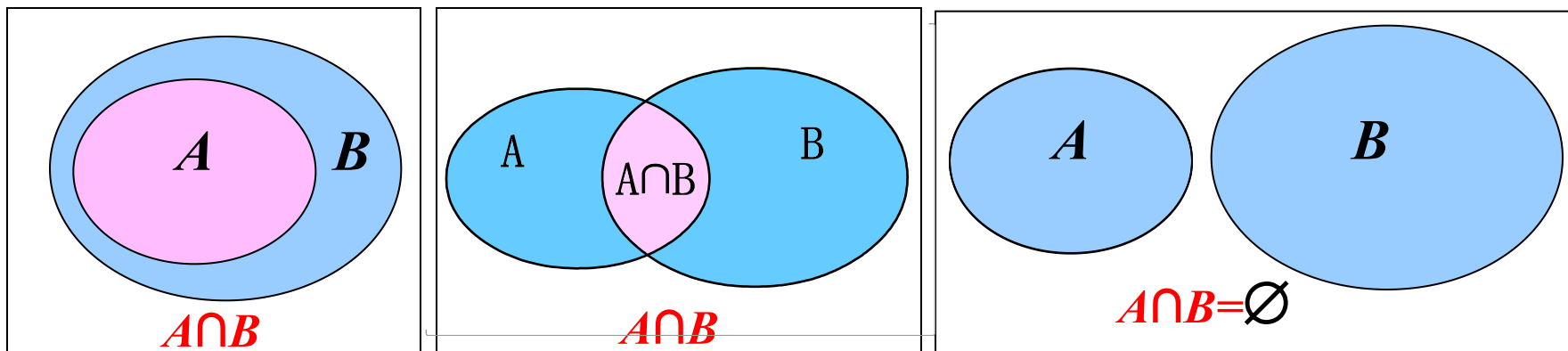
一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（intersection set）。

记作： $A \cap B$ （读作：“ A 交 B ”）

即： $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$

说明：两个集合求交集，结果还是一个集合，是由集合 A 与 B 的**公共元素**组成的集合。

韦恩图表示：



例1、(1)设 $A=\{2, 4, 6, 7\}$, $B=\{0, 1, 2, 6\}$,
则 $A\cap B=\underline{\{2, 6\}}$.

(2)、已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, m, 4\}$
 $A\cap B=\{2, 3\}$, 则 $m=\underline{3}$.

例2 设集合 $A=\{(x, y) \mid x-y=1\}$,
集合 $B=\{(x, y) \mid x+y=5\}$, 求 $A \cap B$

问题:

- (1) 集合 A 、 B 中的元素分别是什么? 有几个?
- (2) 集合 A 、 B 各表示怎样的集合?
- (3) $A \cap B$ 中的元素要满足什么要求?

练习一：教材第22页练习1.3.1

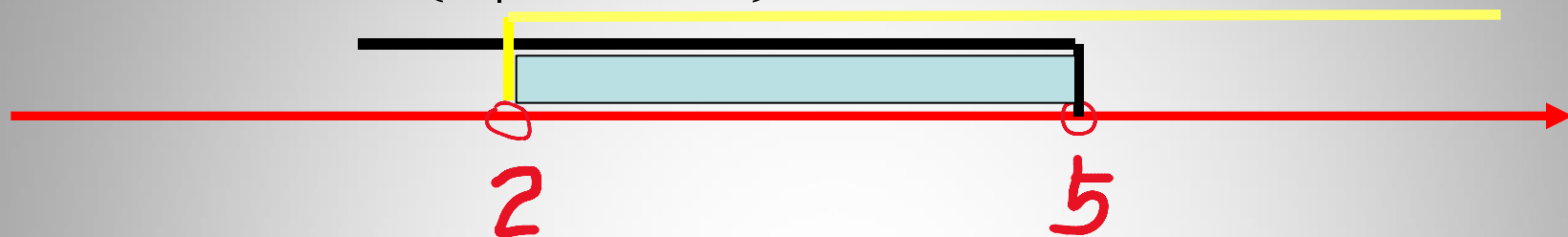
- 1、设集合 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 求 $A \cap B$
- 2、设集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, 求 $A \cap B$
- 3、设集合 $A = \{(x, y) \mid x - 2y = 1\}$,
 $B = \{(x, y) \mid x + 2y = 3\}$, 求 $A \cap B$

1、 $\{2, 3, 4\}$

2、 $\emptyset$

3、 $\{(2, 1/2)\}$

例3、设集合 $A = \{x|x < 5\}$ ，集合 $B = \{x|x > 2\}$ ，
求 $A \cap B = \{x|2 < x < 5\}$



变式一：集合**B**改为 $\{x|x < 6\}$ ；

变式二：集合**A**改为 $\{x|x \geq 3\}$ ；

变式三：集合**B**改为 $\{x|x \geq 6\}$ ；

规律：同“大”取“大”；同“小”取“小”；
一“大”一“小”取“中间”，没有中间为空集。

练习二、设 $S = \{x | 2x + 1 > 0\}$, $T = \{x | 3x - 5 < 0\}$,

则 $S \cap T = \underline{D}$.

A. $\emptyset$

B. $\{x | x < -\frac{1}{2}\}$

C. $\{x | x > \frac{5}{3}\}$

D. $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3}\}$

设集合 $M = \{m \mid -3 < m < 2, m \in \mathbf{Z}\}$,

$N = \{n \mid -1 \leq n \leq 3, n \in \mathbf{Z}\}$, 求 $M \cap N$

[] $\because M = \{-2, -1, 0, 1\}$,

$N = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,

$\therefore M \cap N = \{-1, 0, 1\}$

细节决定成败！

已知 $A = \{(x, y) | x + y = 16\}$,
 $B = \{(x, y) | x - 2y = 7\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

小结

1、交集的概念

2、求交集的方法：

（1）观察法（不遗漏）

（2）数形结合（利用数轴，画出范围，确定公共部分）

3、注意点：审清题意，注意分析集合中的元素表达形式及其含义（方程观点、函数观点）。

4、交集性质

$$A \cap A = \underline{A}$$

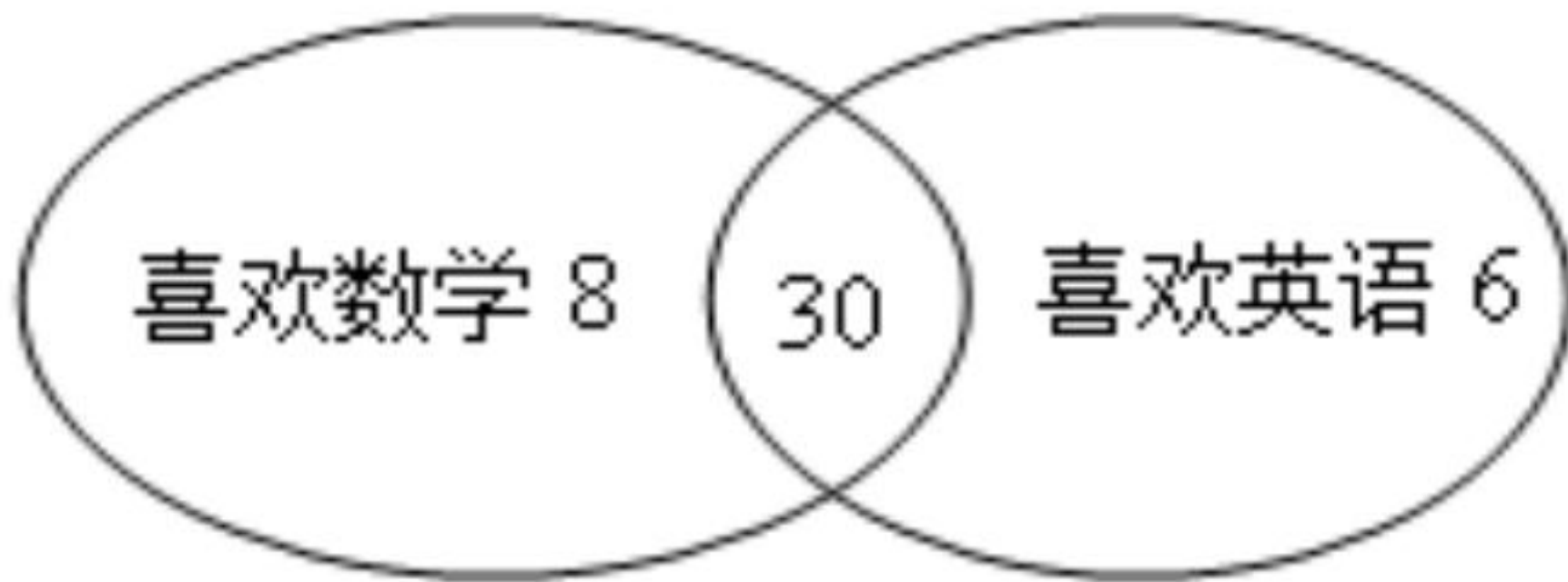
$$A \cap \emptyset = \underline{\emptyset}$$

$$A \cap B = A$$

$$A \underline{\hspace{1cm}} B$$

问题解决：

4



$$A = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$$

$$B = \{y | y = x + 1, x \in \mathbf{R}\} \quad A \cap B = (\quad)$$

$$A = \{(0,1), (1,2)\}$$

$$B = \{(0,1)\}$$

$$C = \{(1,2)\}$$

$$D = \{y | y \geq 1\}$$

解： 由 $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, 因而直线

与抛物线交点为(0,1)、(1,2), 故选 A.

作业布置

- 1、教材第22页练习1、2、3、4、5;
- 2、练习册第16~18页。

思考：

考察下列各个集合，你能说出集合 C 与集合 A 、 B 之间的关系吗？

$$(1) A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\},$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$(2) A = \{x | x \text{ 是有理数} \}, B = \{x | x \text{ 是无理数} \}, \\ C = \{x | x \text{ 是实数} \}.$$

集合 C 是由所有属于集合 A 或属于 B 的元素组成的.

并集概念

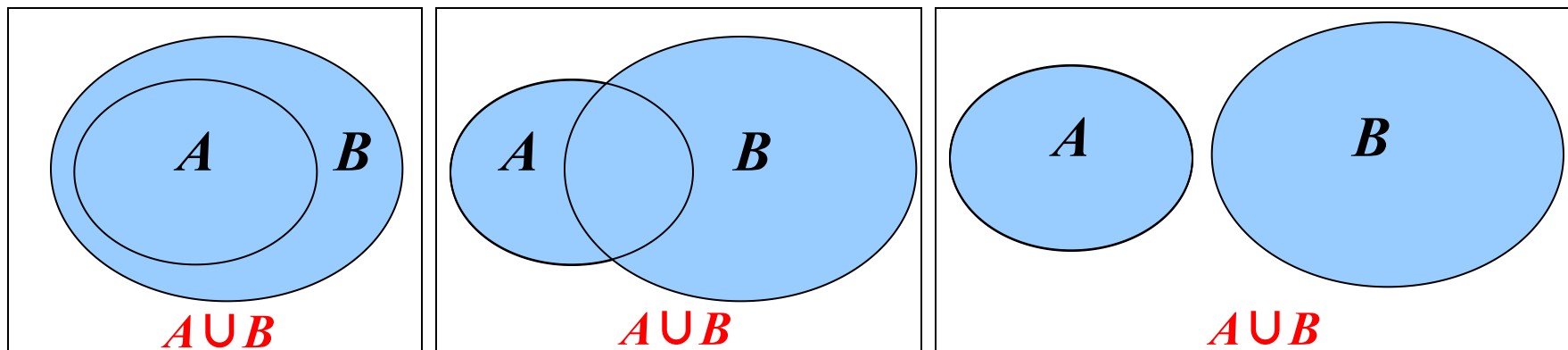
一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的**并集**（**Union set**）。

记作： $A \cup B$ （读作：“ A 并 B ”）

即： $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

说明：两个集合求并集，结果还是一个集合，是由集合 A 与 B 的所有元素组成的集合（**重复元素只看成一个元素**）。

Venn图表示：



并集例题

例1. 设 $A=\{4, 5, 6, 8\}$, $B=\{3, 5, 7, 8\}$, 求 $A \cup B$.

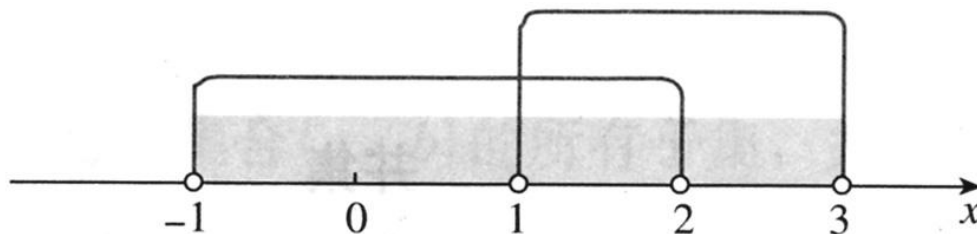
解: $A \cup B = \{4, 5, 6, 8\} \cup \{3, 5, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

例2. 设集合 $A=\{x \mid -1 < x < 2\}$, $B=\{x \mid 1 < x < 3\}$, 求 $A \cup B$.

解: $A \cup B = \{x \mid -1 < x < 2\} \cup \{x \mid 1 < x < 3\} = \{x \mid -1 < x < 3\}$

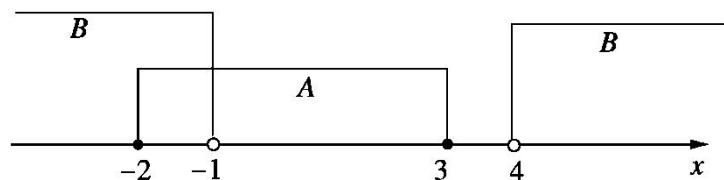
可以在数轴上表示例2中的并集,

集合运算常用数轴画
如下图观察



例4：若集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$ ，则集合 $A \cup B$ 等于()

- A. $\{x | x \leq 3 \text{ 或 } x > 4\}$ B. $\{x | -1 < x \leq 3\}$
 C. $\{x | 3 \leq x < 4\}$ D. $\{x | -2 \leq x < -1\}$



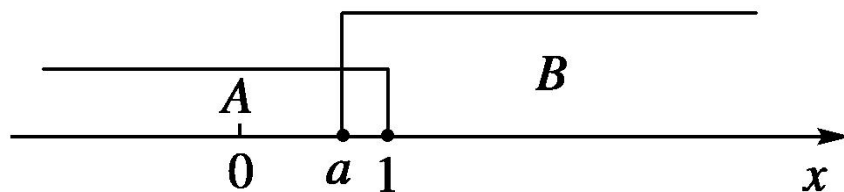
[] A

[] 将集合 A 、 B 表示在数轴上，由数轴可得 $A \cup B = \{x | x \leq 3 \text{ 或 } x > 4\}$ ，故选 A

例5. (09·上海)已知集合 $A = \{x|x \leq 1\}$, $B = \{x|x \geq a\}$, 且 $A \cup B = R$, 则实数 a 的取值范围是_____.

■ [] $a \leq 1$

■ [] 将集合 A 、 B 分别表示在数轴上, 如图所示.



■ 要使 $A \cup B = R$, 则 $a \leq 1$.

■ 6 $A = \{x \mid |x - a| < 4\}$ $B = \{x \mid x \leq 1\}$
 $x \geq 5\}$ $A \cup B = \mathbf{R}$ a

[解析] $A = \{x \mid |x - a| < 4\} = \{x \mid a - 4 < x < a + 4\},$

$\because A \cup B = \mathbf{R}, \therefore$ 应满足 $\begin{cases} a + 4 \geq 5 \\ a - 4 < -1 \end{cases}, \therefore 1 \leq a < 3.$

并集性质

$$A \cup A \text{ ______}$$

$$A \cup \emptyset \text{ ______}$$

$$A \cup B \quad A \Rightarrow B \text{ ______ } A$$

并集的相关性质：

并集交换律

$$1: A \cup B = B \cup A$$

$$2: A \cup A = A$$

$$3: A \cup \phi = A$$

$$4: A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$$

$$5: B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$$

$$6: A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

$$7: (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

并集结合律

$$8: A \cup B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$$

类比并集的相关性质

$$1: A \cap B = B \cap A$$

$$1: A \cup B = B \cup A$$

$$2: A \cap A = A$$

$$2: A \cup A = A$$

$$3: A \cap \phi = \phi$$

$$3: A \cup \phi = A$$

$$4: A \cap B = A \Rightarrow B \supseteq A$$

$$4: A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$$

$$5: B \supseteq A \Rightarrow A \cap B = A$$

$$5: B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$$

$$6: A \supseteq A \cap B, B \supseteq A \cap B$$

$$6: A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

$$7: (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$7: (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

2. 利用数形结合的思想，将满足条件的集合用韦恩图或数轴一一表示出来，从而求集合的交集、并集，这是既简单又直观且是最基本、最常见的方法，要注意灵活运用.
3. 集合元素的互异性在解决集合的相等关系、子集关系、交集等时常遇到，忽视它很多时候会造成结果失误，解题时要多留意. 解决集合问题时，常常要分类讨论，要注意划分标准的掌握，做到不重、不漏，注意检验.

命题方向 并集的概念及其运算

若已知 $x \in A \cup B$ ，那么它包含三种情形：

- ① $x \in A$ 且 $x \notin B$;
- ② $x \in B$ 且 $x \notin A$;
- ③ $x \in A$ 且 $x \in B$ ，这在解决与并集有关问题时应引起注意.

命题方向



交集的概念及其运算

- 在求 $A \cap B$ 时，只要搞清两集合的公共元素是什么或公共元素具有怎样的性质即可。反之，若已知 $a \in A \cap B$ ，那么就可以断定 $a \in A$ 且 $a \in B$ ；若 $A \cap B = \emptyset$ ，说明集合 A 与 B 没有公共元素。

TSYTCX 探索延拓创新



[5] 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 分别求适合下列条件的 a 值.

(1) $9 \in A \cap B$; (2) $\{9\} = A \cap B$.

[] $9 \in A \cap B$ 与 $\{9\} = A \cap B$ 意义不同, $9 \in A \cap B$ 说明 9 是 A 与 B 的一个公共元素, 但 A 与 B 中允许有其它公共元素. $\{9\} = A \cap B$, 说明 A 与 B 的公共元素有且只有一个 9.

[]

$$(1) \because 9 \in A \cap B, \therefore 9 \in A$$

$$\therefore 2a - 1 = 9 \text{ 或 } a^2 = 9, \therefore a = 5 \text{ 或 } a = \pm 3.$$

检验知： $a = 5$ 或 $a = -3$ 满足题意.

$$(2) \because \{9\} = A \cap B, \therefore 9 \in A \cap B,$$

$$\therefore a = 5 \text{ 或 } a = \pm 3.$$

检验知： $a = 5$ 时， $A \cap B = \{-4, 9\}$ 不合题意，
 $\therefore a = -3.$

跟踪练习 5...

- 已知： $A = \{x | 2x^2 - ax + b = 0\}$, $B = \{x | bx^2 + (a+2)x + 5 + b = 0\}$, 且 $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$, 求 $A \cup B$.

[分析] 由交集的定义知 $\frac{1}{2} \in A$, 且 $\frac{1}{2} \in B$, 于是可得关于 a 、 b 的二元方程组. 解方程组求 a 、 b 的值, 即可得集合 A 、 B , 再求 $A \cup B$.

[解析] $\because A \cap B = \{\frac{1}{2}\}, \therefore \frac{1}{2} \in A, \text{ 且 } \frac{1}{2} \in B.$

$$\therefore \begin{cases} 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}a + b = 0 \\ b \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(a+2) + 5 + b = 0 \end{cases}, \text{ 解之得 } \begin{cases} a = -\frac{43}{9} \\ b = -\frac{26}{9} \end{cases},$$

$$\text{于是 } A = \{x | 18x^2 + 43x - 26 = 0\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{26}{9}\}.$$

$$B = \{x | 26x^2 + 25x - 19 = 0\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{19}{13}\}.$$

$$\therefore A \cup B = \{\frac{1}{2}, -\frac{26}{9}, -\frac{19}{13}\}.$$

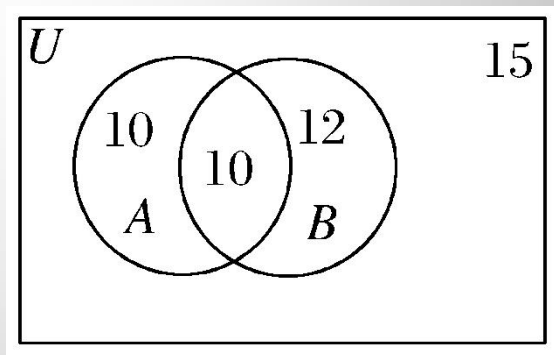


[例6] 高一(3)班的学生中，参加语文课外小组的有20人，参加数学课外小组的有22人，既参加语文又参加数学小组的有10人，既未参加语文又未参加数学小组的有15人，问高一(3)班共有学生几人？

- [] 借助Venn图可直观地得出有限集元素的个数. 用 $card(A)$ 表示集合 A 中所含元素的个数，则计数公式 $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - Card(A \cap B)$

[] 设 $U = \{\text{高一(3)班学生}\}$, $A = \{\text{高一(3)班参加语文小组的学生}\}$, $B = \{\text{高一(3)班参加数学小组的学生}\}$, 则 $A \cap B = \{\text{高一(3)班既参加语文小组又参加数学小组的学生}\}$.

- 有 $\text{card}(U) = 15$, $\text{card}(A \cup B) = 15$, $\text{card}(A) = 10$, $\text{card}(B) = 12$, $\text{card}(A \cap B) = 10$. 故高一(3)班有47名学生.



- [] 以上解法不对. 集合 A , B 应该结合代表元素从整体意义上把握, 它们是当 x 取一切实数时所得的 y 的值的集合, 在审题时必须首先弄清集合的本质含义.
- [] $A = \{y \in \mathbf{R} | y \geq 1\}$ $B = \mathbf{R}$ $A \cap B = \{y \in \mathbf{R} | y \geq 1\}$ D.

4. (09 · 广东理) 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x | -2 \leq x - 1 \leq 2\}$ 和 $N = \{x | x = 2k - 1, k = 1, 2, \dots\}$ 的关系的韦恩(Venn)图如图所示, 则阴影部分所示的集合的元素共有()

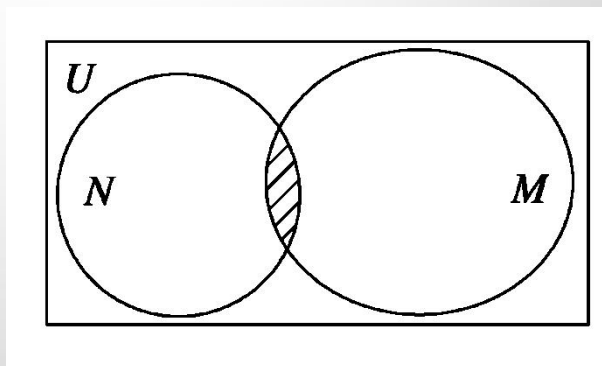
A. 3个

B. 2个

C. 1个

D. 无穷多个

B



- [] B
- [] $M = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, N 为正奇数集,
- $\therefore M \cap N = \{1, 3\}$.

实例引入

请看下例：

$A = \{\text{班上所有参加足球队同学}\}$

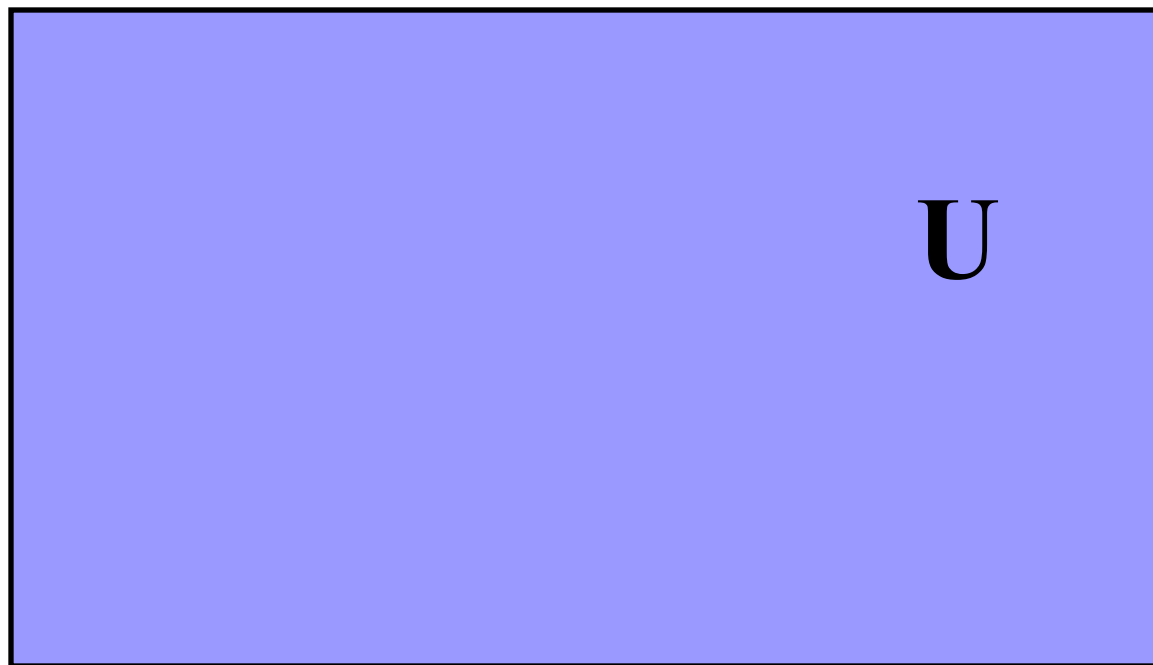
$B = \{\text{班上没有参加足球队同学}\}$

$U = \{\text{全班同学}\}$

那么 S 、 A 、 B 三个集合之间有什么关系？

全集概念

一般地，如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素，那么就称这个集合为**全集**（**Universe set**）。通常记作 U 。



实例引入

请看下例：

$A = \{\text{班上所有参加足球队同学}\}$

$B = \{\text{班上没有参加足球队同学}\}$

$U = \{\text{全班同学}\}$

全集

U

那么U、A、B三个集合之间有什么关系？

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{5, 6, 7, 8\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

1, 2

3, 4

5, 6

7, 8

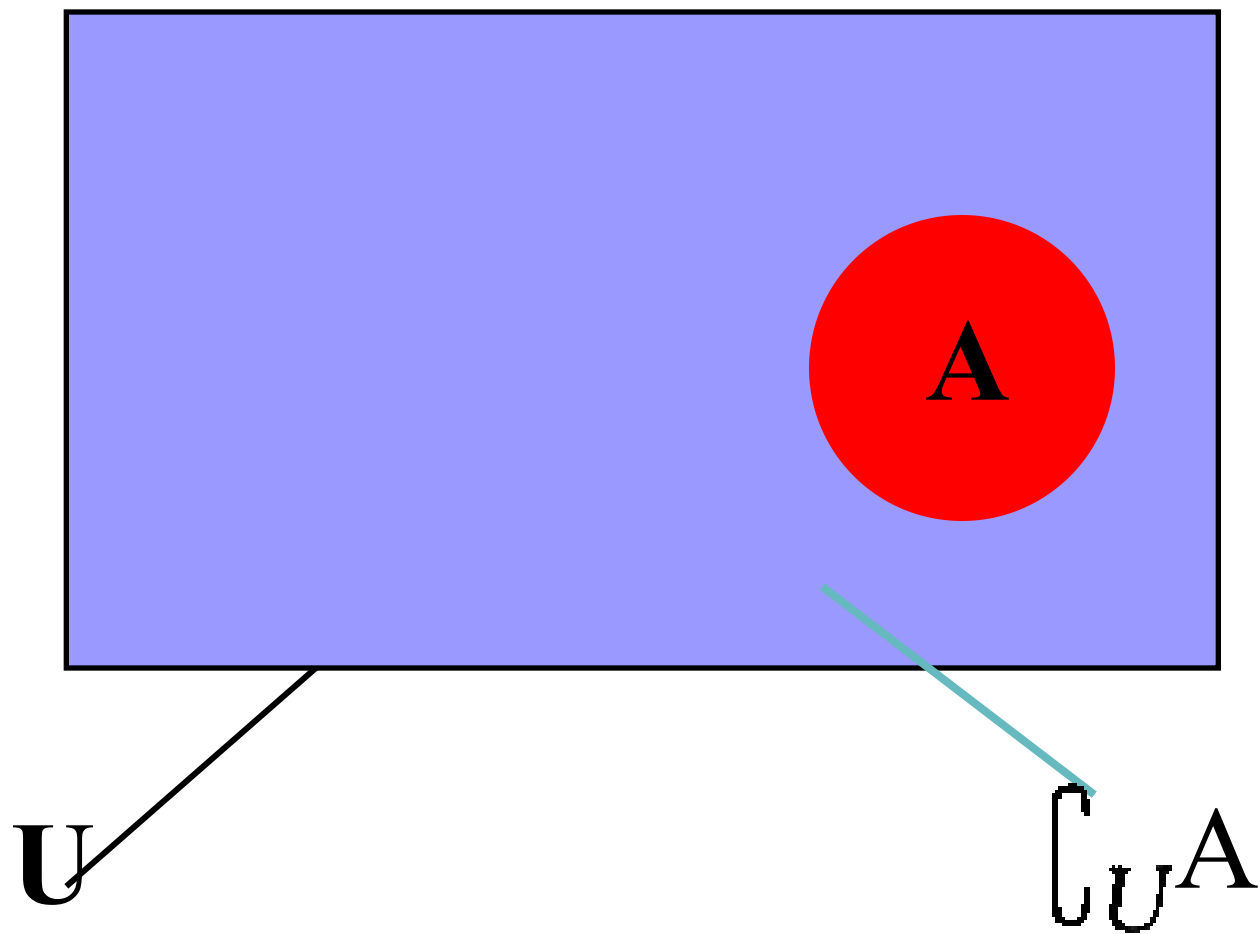
那么U、A、B三个集合之间有什么关系？

补集概念

对于一个集合 A ，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为**集合 A 相对于全集 U 的补集**（**complementary set**），简称为**集合 A 的补集**。

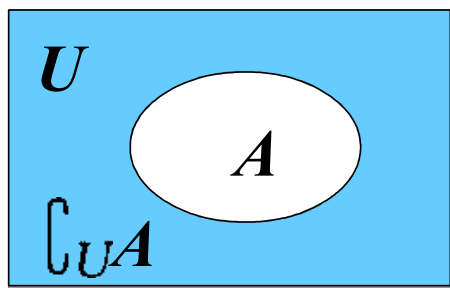
记作： $\complement_U A$

即： $\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$



说明：补集是与全集同时存在的。补集的概念必须要有全集的限制。

Venn图表示:



补集的性质 $A \subseteq U$

$$\complement_U A \subseteq U$$

(1)、 $A \cup (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2)、 $A \cap (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$

问题：

在下面的范围内求方程 $(x-2)(x^2-3)=0$ 的解集：
(1) 有理数范围； (2) 实数范围。

并回答不同的范围对问题结果有什么影响？

解： (1) 在有理数范围内只有一个解2，即：

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2\}$$

(2) 在实数范围内有三个解 $2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ ，即：

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

补集例题

例. 设 $U=\{x|x\text{是小于9的正整数}\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$.

解: 根据题意可知:

$$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

所以: $\complement_U A=\{4, 5, 6, 7, 8\},$
 $\complement_U B=\{1, 2, 7, 8\}.$

说明: 可以结合Venn图来解决此问题.

补集例题

例6. 设全集 $U = \{x \mid x \text{ 是三角形}\}$, $A = \{x \mid x \text{ 是锐角三角形}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是钝角三角形}\}$.

求 $A \cap B$, $\complement_U (A \cup B)$

解: 根据三角形的分类可知

$$A \cap B = \emptyset,$$

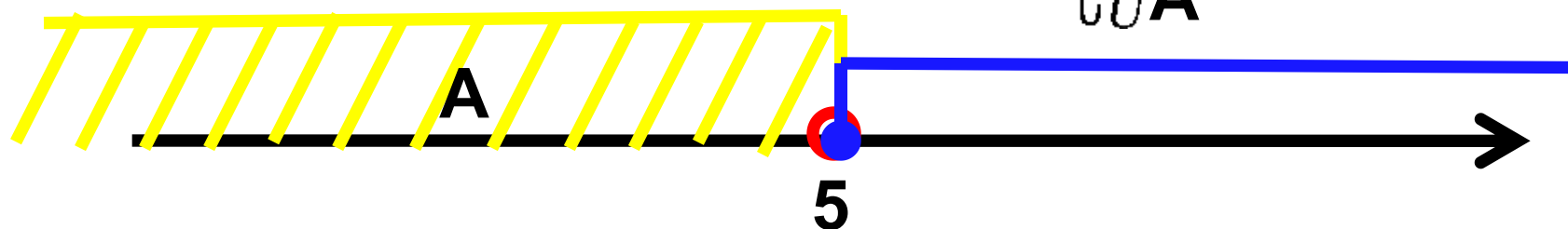
$$A \cup B = \{x \mid x \text{ 是锐角三角形或钝角三角形}\},$$

$$\complement_U (A \cup B) = \{x \mid x \text{ 是直角三角形}\}.$$

例. 设全集为 $\mathbf{R}$, $A = \{x \mid x < 5\}$, $B = \{x \mid x > 3\}$.

求 $\complement_U A$, $\complement_U B$

解: $\complement_U A$



$$\complement_U A = \{x \mid x \geq 5\}$$

例 设 $U = \{x | x \text{ 是小于9的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 求 $C_U A$, $C_U B$.

解: 根据题意可知, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

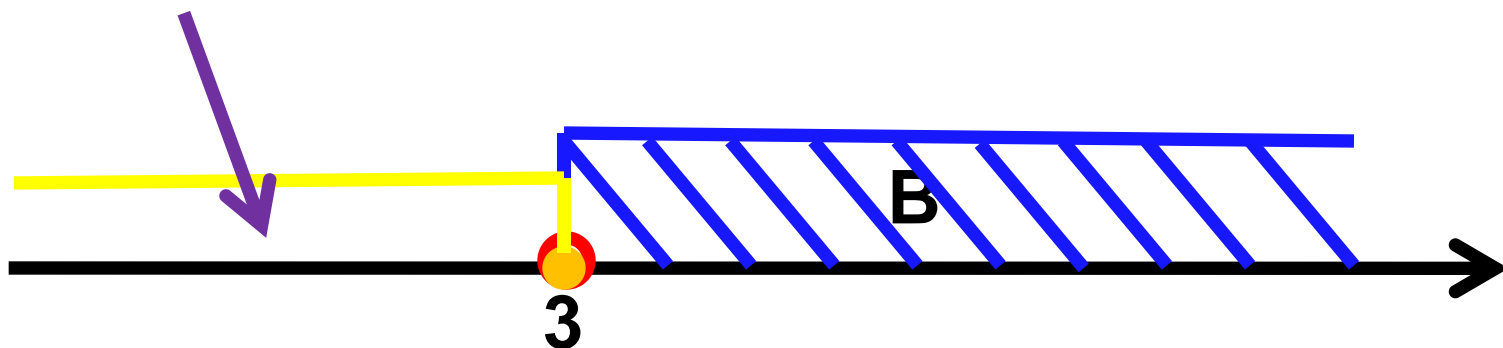
所以 $C_U A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$C_U B = \{1, 2, 7, 8\}$.

例. 设全集为 $\mathbf{R}$, $A = \{x \mid x < 5\}$, $B = \{x \mid x > 3\}$.

求 $\complement_U A$, $\complement_U B$

解: $\complement_U B$



$$\complement_U B = \{x \mid x \leq 3\}$$

说明: (1) 涉及不等式, 常用数轴法. 注意标明实心, 空心

小结

1. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 集合 $A = \{-3, x^2, x + 1\}$, $B = \{x - 3, 2x - 1, x^2 + 1\}$

如果 $A \cap B = \{-3\}$, 求 $A \cup B$ 。

2. 已知集合 $A=\{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$, $B=\{x \mid x > a\}$

①若 $A \cap B = \varnothing$, 求实数 a 的取值范围;

②若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

3, $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid m+1 \leq x \leq 2m-1\}$,
若 $A \cup B = A$, 求 m 的取值范围.

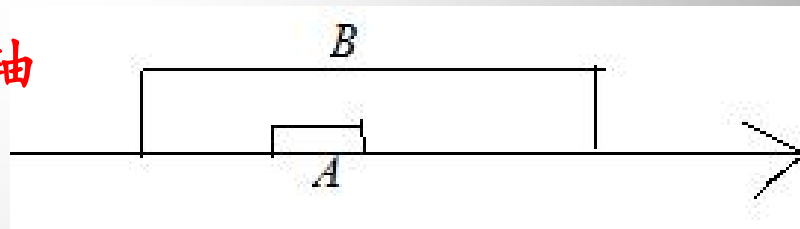
练习：1. 判断正误

(1) 若 $U=\{\text{四边形}\}$, $A=\{\text{梯形}\}$,
则 $C_U A = \{\text{平行四边形}\}$

错

(2) 若 U 是全集, 且 $A \subseteq B$, 则 $C_U A \subseteq C_U B$

错 如图利用数轴



(3) 若 $U=\{1, 2, 3\}$, $A=U$, 则 $C_U A = \phi$

对

2. 如果全集 $U = N$, 那么 N^* 的补集 $\complement_U N^*$
= . {0}

3. 已知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A =$. {2, 4, 6}

4. 已知 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 15\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

$$\{x | x \leq 15\}$$

5. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $\complement_U(A \cap B) = (\quad)$

A. $\{2, 3\}$

B. $\{1, 4, 5\}$

C. $\{4, 5\}$

D. $\{1, 5\}$

[] B

[] $\because A \cap B = \{2, 3\},$
 $\therefore \complement_U(A \cap B) = \{1, 4, 5\}.$

6. (09 · 浙江理) 设 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap \complement_U B = (\quad)$

A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$

B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$

C. $\{x | x < 0\}$

D. $\{x | x > 1\}$

[] B

[] $\because B = \{x | x > 1\}, \therefore \complement_U B = \{x | x \leq 1\},$

$\therefore A \cap \complement_U B = \{x | x > 0\} \cap \{x | x \leq 1\} = \{x | 0 < x \leq 1\}.$

故选 B.

2. 设集合 $A=\{|2a-1|, 2\}$, $B=\{2, 3, a^2+2a-3\}$
且 $C_B A=\{5\}$, 求实数 a 的值。

解： 易得集合 A 中没有 5, 集合 B 中一定有 5.

$$\therefore a^2+2a-3=5.$$

$$\therefore a=2 \quad \text{or} \quad -4.$$

接下来验证是否满足题意要求。此步骤一般不可少！

当 $a=2$ 时, $|2a-1|=3$. 此时, 满足 $C_B A=\{5\}$.

当 $a=-4$ 时, $|2a-1|=9$. 此时, 显然不满足

综上所述, $a=2$.

(1) 补集是相对全集而言，离开全集谈补集没有意义；

(2) 若 $B = \complement_U A$ ，则 $A = \complement_U B$ ，
即 $\complement_U(\complement_U A) = A$ ；

(3) $\complement_U U = \emptyset$ ， $\complement_U \emptyset = U$.

(4) $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$
 $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$



[例2] 设全集 $U \neq \emptyset$ ，已知集合 M 、 P 、 S 之间满足关系： $M = \complement_U P$ ， $P = \complement_U S$ ，则集合 M 与 S 之间的正确关系是()

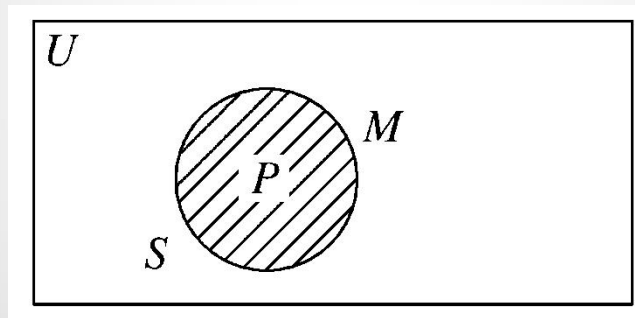
A. $M = \complement_U S$

B. $M = S$

C. $S \subsetneq M$

D. $M \subsetneq S$

- [] 研究抽象集合的关系问题，可以利用集合的Venn图去分析，在作图的时候要设法将所有可能的情况都考虑进去，以防因思虑不全面和由局部图形的先入为主而导致解题的失误.



- [] 由图形可得正确选项为B.

[例3] 已知 $A = \{x|x < 3\}$, $B = \{x|x < a\}$

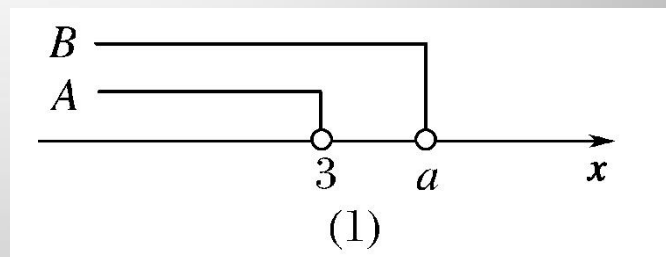
(1) 若 $A \subseteq B$, 问 $\complement_R B \subseteq \complement_R A$ 是否成立?

(2) 若 $\complement_R A \subseteq \complement_R B$, 求 a 的取值范围.

[] (1) $\because A \subseteq B$, 如图(1).

$\therefore a \geq 3$, 而 $\complement_R B = \{x|x \geq a\}$, $\complement_R A = \{x|x \geq 3\}$

$\therefore \complement_R B \subseteq \complement_R A$. 即 $\complement_R B \subseteq \complement_R A$ 成立.



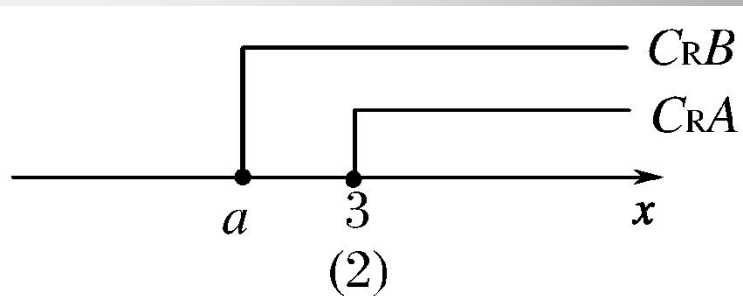
(2)如图(2),

$$\because \complement_R A = \{x|x \geq 3\}, \quad \complement_R B = \{x|x \geq a\}$$

$$\because \complement_R A \subseteq \complement_R B, \quad \therefore a \leq 3.$$

故所求 a 的取值范围为

$$\{a|a \leq 3\}.$$



解决这类问题一要注意数形

结合, 以形定数, 才能相得益彰, 二要注意验证端点值, 做到准确无误, 不然功亏一篑.

跟踪练习③...

已知全集 $U = \{2, 0, 3 - a^2\}$, $P = \{2, a^2 - a - 2\}$,
且 $\complement_U P = \{-1\}$, 则实数 $a =$ _____.

[] 2

[] 由 $P \cup \complement_U P = U$ 知,

$$\begin{cases} 3 - a^2 = -1 \\ a^2 - a - 2 = 0 \end{cases}, \therefore a = 2.$$

3. 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 非空集 $A=\{x \in U | x^2 - 5x + q = 0\}$, 求 $C_U A$ 及 q 的值。

解：集合 A 非空，则 $x^2 - 5x + q = 0$ 一定有解。

由根及韦达定理知：

$$x_1 + x_2 = 5, \quad 25 - 4q \geq 0, \quad q = x_1 \cdot x_2.$$

$\therefore x_1, x_2$ 的组合可以是：1和4，2和3。

即 $A = \{1, 4\}, \{2, 3\}$ 。

$$\therefore C_U A = \{2, 3, 5\}, \quad q = 4;$$

$$\text{or } C_U A = \{1, 4, 5\}, \quad q = 6.$$

4. 已知 $A = \{x \mid x^2 - px - 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + qx + r = 0\}$
且 $A \cup B = \{-2, 1, 5\}$, $A \cap B = \{-2\}$, 求 p, q, r 的值.

解: $\because A \cap B = \{-2\}$, $\therefore$ 集合 A 中必有元素 -2 .

即 -2 是方程 $x^2 - px - 2 = 0$ 的一个解,

代入得: $p = -1$.

由此可解得 A 中的另一个元素为 1 .

$\therefore A = \{-2, 1\}$, $B = \{-2, 5\}$.

$\therefore -2, 5$ 是方程 $x^2 + qx + r = 0$ 的两个根.

由韦达定理知:

$$\begin{cases} -2 + 5 = -q \\ -2 \times 5 = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = -3 \\ r = -10 \end{cases}.$$

全部回代, 验证是否正确。

5. 设 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 已知 $A \cap B = \{9\}$, 求 a 的值, 并求出 $A \cup B$.

解: $\because A \cap B = \{9\}, \therefore 9 \in A$

所以 $a^2 = 9$ 或 $2a-1 = 9$, 解得 $a = \pm 3$ 或 $a = 5$

当 $a = 3$ 时, $A = \{9, 5, -4\}$, $B = \{-2, -2, 9\}$, B 中元素违背了互异性, 舍去.

当 $a = -3$ 时, $A = \{9, -7, -4\}$, $B = \{-8, 4, 9\}$, $A \cap B = \{9\}$ 满足题意, 故 $A \cup B = \{-7, -4, -8, 4, 9\}$.

当 $a = 5$ 时, $A = \{25, 9, -4\}$, $B = \{0, -4, 9\}$, 此时 $A \cap B = \{-4, 9\}$, 与 $A \cap B = \{9\}$ 矛盾, 故舍去.

综上所述, $a = -3$ 且 $A \cup B = \{-7, -4, -8, 4, 9\}$.

3. 已知 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0\}$
若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的值.

解: $\because A = \{1, 2\}, A \cup B = A,$

$\therefore B \subseteq A.$

$\therefore B \neq \emptyset$ 或 $B = \{1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{1, 2\}.$

当 $B \neq \emptyset$ 时, $\Delta < 0$, a 不存在.

当 $B = \{1\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ 1 - a + a - 1 = 0 \end{cases} \therefore a = 2;$

当 $B = \{2\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ 4 - 2a + a - 1 = 0 \end{cases} \therefore a \text{ 不存在};$

当 $B = \{1, 2\}$ 时, $\begin{cases} 1 + 2 = a \\ 1 \times 2 = a - 1 \end{cases} \therefore a = 3;$

综上所述, $a = 2$ 或 $a = 3.$

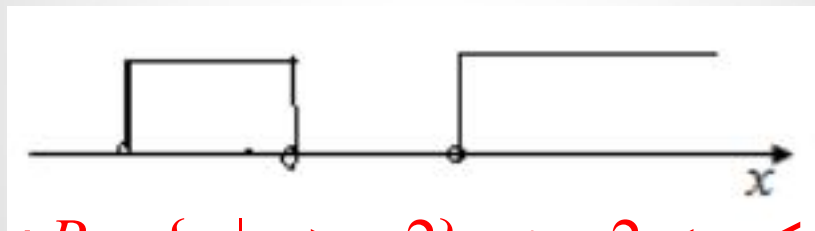
前面几个例题都是等式关系，接下来我们来思考不等关系。

4. 设集合 $A = \{x \mid -2 < x < -1\} \cup \{x \mid x > 1\}$, $B = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

若 $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$, 求 a, b 的值.

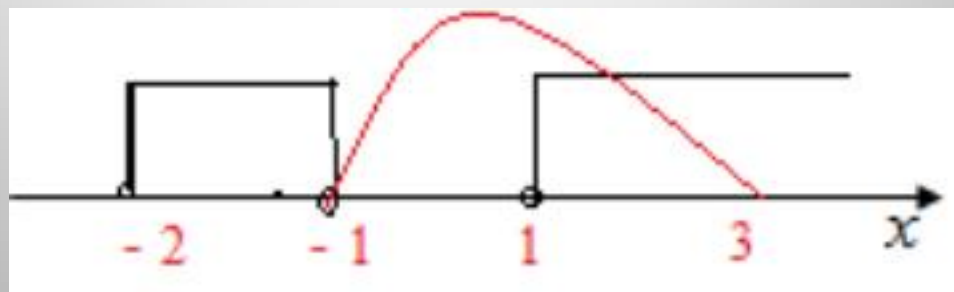
解：不等关系一般都会借助于数轴。

在数轴上画出集合 A 的区域如下所示：



$\because A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, $\therefore -2 < a \leq -1$, $b \geq 1$.

又 $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$, $\therefore a = -1$, $b = 3$.



[] 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0\}$, $B = \{x | x < 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

[] 集合 A 是由方程 $x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0$ ① 的实根组成的集合, $A \cap B \neq \emptyset$ 说明方程①的根可能为: (1) 两负根; (2) 一负根一零根; (3) 一负根一正根三种情况, 分别求解十分麻烦, 这时我们从求解问题的反面考虑, 采用“正难则反”的解题策略, 先由 $\Delta \geq 0$ 求出全集 U , 然后求方程①两根均为非负时 m 的取值范围, 最后再利用“补集”求解.

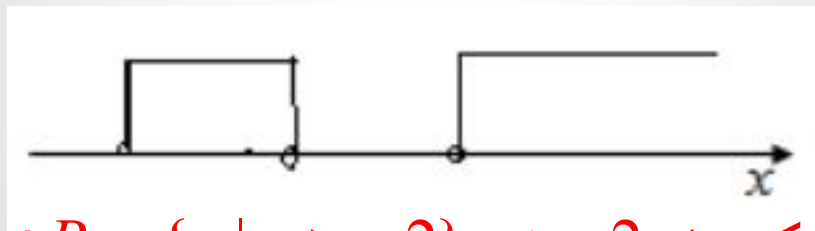
前面几个例题都是等式关系，接下来我们来思考不等关系。

4. 设集合 $A = \{x \mid -2 < x < -1\} \cup \{x \mid x > 1\}$, $B = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

若 $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$, 求 a, b 的值.

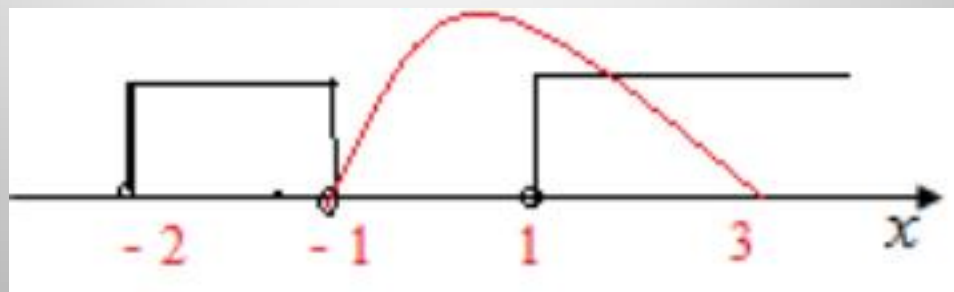
解：不等关系一般都会借助于数轴。

在数轴上画出集合 A 的区域如下所示：



$\because A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, $\therefore -2 < a \leq -1$, $b \geq 1$.

又 $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$, $\therefore a = -1$, $b = 3$.



[解析] 设全集 $U = \{m | \Delta = (-4m)^2 - 4(2m + 6) \geq 0\} = \{m | m \leq -1 \text{ 或 } m \geq \frac{3}{2}\}.$

若方程 $x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0$ 的二根 x_1 、 x_2 均非负,

$$\text{则} \begin{cases} m \in U, \\ x_1 + x_2 = 4m \geq 0, \Rightarrow m \geq \frac{3}{2}. \\ x_1 x_2 = 2m + 6 \geq 0. \end{cases}$$

$\therefore \{m | m \geq \frac{3}{2}\}$ 在 U 中的补集为 $\{m | m \leq -1\},$

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $\{m | m \leq -1\}.$



[例] 已知集合 $U = \{x \in \mathbf{R} | 1 < x \leq 7\}$, $A = \{x \in \mathbf{R} | 2 \leq x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | 3 \leq x < 7\}$, 求

(1) $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;

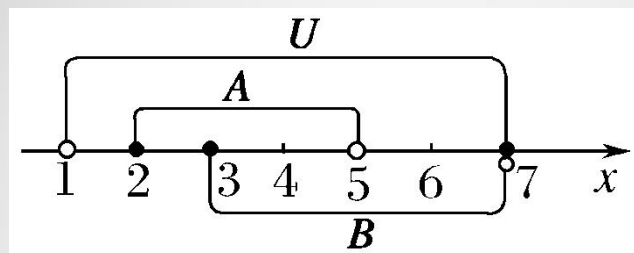
(2) $\complement_U (A \cup B)$;

(3) $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$;

(4) $\complement_U (A \cap B)$.

(5) 观察上述结果你能得出什么结论.

- [] 利用数轴工具，画出集合 U 、 A 、 B 的示意图，如下图所示。



可以得到， $A \cap B = \{x \in \mathbf{R} | 3 \leq x < 5\}$ 。

$$A \cup B = \{x \in \mathbf{R} | 2 \leq x < 7\},$$

$$\complement_U A = \{x \in \mathbf{R} | 1 < x < 2 \text{ 或 } 5 \leq x \leq 7\},$$

$$\complement_U B = \{x \in \mathbf{R} | 1 < x < 3 \text{ 或 } x = 7\}.$$

从而可求得

$$(1)(\bigcap_U A) \cap (\bigcap_U B) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\} \cup \{7\}.$$

$$(2)\bigcap_U (A \cup B) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\} \cup \{7\}.$$

$$(3)(\bigcap_U A) \cup (\bigcap_U B) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 3 \text{ 或 } 5 \leq x \leq 7\}.$$

$$(4)\bigcap_U (A \cap B) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 3 \text{ 或 } 5 \leq x \leq 7\}.$$

(5)认真观察不难发现:

$$\bigcap_U (A \cup B) = (\bigcap_U A) \cap (\bigcap_U B);$$

$$\bigcap_U (A \cap B) = (\bigcap_U A) \cup (\bigcap_U B).$$

跟踪练习 4

设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

$$[\quad] \quad \complement_U A = \{1, 2, 6, 7, 8\},$$

$$\complement_U B = \{1, 2, 3, 5, 6\},$$

$$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1, 2, 6\},$$

$$(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}.$$

知识小结

1. 求集合的并、交、补是集合间的基本运算，运算结果仍然还是集合。
2. 区分交集与并集的关键是“且”与“或”，在处理有关交集与并集的问题时，常常从这两个字眼出发去揭示、挖掘题设条件。
3. 注意结合Venn图或数轴进而用集合语言表达，增强数形结合的思想方法。

7. 你会求解下列问题吗？

集合 $A = \{x | -2 \leq x < 1\}$.

(1) 若 $B = \{x | x > m\}$, $A \subseteq B$, 则 m 的取值范围是 $m < -2$.

(2) 若 $B = \{x | x < m\}$, $A \subseteq B$, 则 m 的取值范围是 $m \geq 1$.

(3) 若 $B = \{x | x < m - 5 \text{ 或 } x \geq 2m - 1\}$, $A \cap B = \emptyset$, 则 m 的取值范围是 $1 \leq m \leq 3$.