微型课题在数学探究教学中的应用

——“牛顿三叉曲线的探究”教学实录与反思

一、基本情况

1.学情分析

学生思维敏捷，分析、理解能力都较强，对学好数学有很高的热情和自信，并具有一定的自主探究和合作学习的能力.但对于一般函数，特别是有一定难度的新函数的探究还没有经验.

2.教材分析

（1）所授内容在教材中的位置

苏教版必修1教材第108页“本章概览”中指出：“研究函数的一般方法，即通过函数的图象探究函数的性质，利用函数的性质研究函数.”本课是在学生已经学完了幂指对函数有关性质后的一堂拓展课，通过本课教学，旨在对高一学生如何学好函数、如何研究一个新函数作一个方法上的引领和启示.

（2）教学目标

1）理解和掌握画出简单复合函数大致图象的方法；

2）通过自主探索，理解研究函数的一般途径和方法，并能运用其归纳出一类函数的基本特征；

3）通过自主探索，形成善于观察、勇于探究的良好习惯.

（3）教学重点和难点

利用函数性质画图；归纳出一类函数的基本特征.

二、教学过程

1.情境引入

问题1请大家回忆一下，我们在函数这一章学习了哪些知识？

生1：我们学过了一次函数、二次函数、反比例函数、幂函数、指数函数、对数函数.

师：大家是怎样认识这些函数的？

生2：从函数的性质、图象来研究.

师：很好，研究函数的一般方法是通过函数的图象探究函数的性质，利用函数的性质研究函数.

问题2　判断$f(x)=x+\frac{1}{x}$的奇偶性.

生3:函数的定义域是$\{x|x\neq 0\}$,定义域关于原点中心对称,又因为$f(-x)=-f(x)$,所以它是奇函数.

师:研究一个函数一般需要研究哪些方面呢?

生4:函数的定义域、奇偶性、单调性、最值.

问题3　已知函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

（1）证明 f（x）在区间（0，1]上是单调减函数，在区间[1，+∞）上是单调增函数；

（2）试求函数 f（x）的最大值或最小值.

生5：（在黑板右边演算，解答如下）

任意取$x_1<x_2$且$x_1,x_2\in(0,1]$,则$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}=(x_1-x_2)+(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})=(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_1\cdot x_2}=(x_1-x_2)(1-\frac{1}{x_1\cdot x_2})=(x_1-x_2)(\frac{x_1\cdot x_2-1}{x_1\cdot x_2})$.因为$0<x_1<x_2\leqslant 1$,所以$x_1-x_2<0$,$x_1\cdot x_2-1<0$,$x_1\cdot x_2>0$,所以$f(x_1)>f(x_2)$,所以$f(x)$在区间$(0,1]$上是单调减函数.

同理可证函数 f（x）在区间[1，+∞）上是单调增函数，且当 x=1 时 f（x）的最小值为 2.

（教师在下面巡视，观察指导学生的证明）

师:任意取$x_1<x_2$且$x_1,x_2\in(0,1]$可以改写为:任取x_1,x_2,且$0<x_1<x_2\leqslant 1$.

2. 学生活动

问题4　函数改为$f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$,$x\in(0,+\infty)$,分界点(最值点)怎么找?

生6:任意取$0<x_1<x_2\leqslant 1$,则$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{a}{x_1}-x_2-\frac{a}{x_2}=(x_1-x_2)+(\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2})=(x_1-x_2)+\frac{a(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}=(x_1-x_2)(1-\frac{a}{x_1\cdot x_2})=(x_1-x_2)(\frac{x_1\cdot x_2-a}{x_1\cdot x_2})$.

演算到这里，生 6 认为单调减区间为（0，a].

生 7:因为 $0 < x_1 < x_2 \leqslant \sqrt{a}$，所以 $x_1 - x_2 < 0$ 且 $x_1 \cdot x_2 - a < (\sqrt{a})^2 - a = 0$. 因为 $x_1 \cdot x_2 > 0$，所以 $f(x_1) > f(x_2)$.

评注　恰当及时的变式，把学生的思维引向纵深.

问题 5　请你说出函数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 的有关性质并画图.

生 8：（在黑板左边板书解答）

（1）定义域：｛x|x≠0｝；

（2）奇偶性：因为 f（-x）=-f（x），所以 f（x）是奇函数；

（3）单调性：f（x）在（-∞，-1）、（1，+∞）上单调递增，在（-1，0）、（0，1）上单调递减；

（4）值域：｛y|y≥2 或 y≤-2｝；

（5）渐近线：y=x 和 x=0.

师：生 8 能够先定位（渐近线、最高点、最低点），然后画出图象.我们知道函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 是自对称图形，其对称轴是直线 y=±x，对称中心是（0，0）.那么上述函数有无这一性质呢？

生 9：该函数对称中心是原点（0，0），无对称轴.

评注 至此课堂教学共用了 17 分钟时间，问题 5 只占用了黑板左边四分之一的地方，无论是从时间还是版面都为下面问题的探究留出了足够的余地.

3.意义建构

问题 6 请大家尝试画出函数 $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ 的图象.

生 10 在黑板上解答，教师鼓励学生动手尝试、合作交流和小组讨论.

评注 让学生在新的问题情境中去思考，经历操作、实践和探究过程，有利于培养学生科学探究的兴趣和勇气.

函数 $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ 的性质：

(1)定义域：$\{x | x \neq 0\}$；

(2)奇偶性：因为 $f(-x) = f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数；

(3)单调性：$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty, -1)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减；

（4）值域：｛y|y≥2｝；

（5）渐近线：直线 y=±x 和直线 x=0.

师：刚才生 10 用了很短的时间就给出了函数的性质并把图象画出来了，如图 1，请同学们补充证明一下它的单调性.

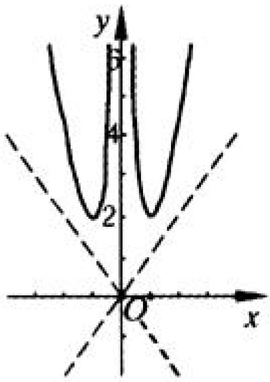

图 1

生 11：任取 $0<x_1<x_2\leq 1$，

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{1}{x_1^2}-x_2^2-\frac{1}{x_2^2}=$

$(x_1^2-x_2^2)+(\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2})=(x_1^2-x_2^2)\cdot$

$(\frac{x_1^2\cdot x_2^2-1}{x_1^2\cdot x_2^2})$，因为 $0<x_1<x_2\leq 1$，

所以 $x_1^2-x_2^2<0$，$x_1^2\cdot x_2^2-1<0$. 故 $(x_1^2-x_2^2)\cdot$

$(\frac{x_1^2\cdot x_2^2-1}{x_1^2\cdot x_2^2})>0$. 因此，$f(x_1)>f(x_2)$.

师：大家看看图象是否正确？

生 12：渐近线好像不是直线 y=x.

师：对！请同学们类比 $y=x+\frac{1}{x}$ 的渐近线是直线 $y=x$，猜测 $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ 的渐近线是什么？

生 13：应该是曲线 $y=x^2$.

师：对！$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x_1=0, x_2=1$，但是 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^2+\frac{1}{x^2} \end{cases}$ 无解. 当 $x=1$ 时，$y=x^2+\frac{1}{x^2}=2$，$y=x^2=1$，当 $x>1$ 时，随 x 值的增大，$y=x$ 越来越"远离"$y=x^2$，而当 $x\to+\infty$ 时，$y=x^2+\frac{1}{x^2}\to y=x^2$，所以直线 $y=x$ 不是渐近线. 我们称曲线 $y=x^2$ 是函数 $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ 的渐近曲线.

评注 至此，学生初步找到了对新函数进行探究的基本思路.

4. 数学理论

问题 7 请研究函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 的性质并画出它的草图.

生 14 上黑板解答，其他学生在下面研究，课堂气氛进入了高潮.

（1）定义域：｛x|x≠0｝；

（2）奇偶性：非奇、非偶函数；

（3）单调性：f（x）在（-1，0）和（1，+∞）上单调递增，在（-∞，-1）和（0，1）上单调递减；

(4)值域：$\{y|y\geq 2\}$；

(5)渐近线：曲线 $y=x^2, y=-x^2$ 和直线 $x=0$.

生 14 在具体作图时犹豫了一会，最终画出了图 2.

师：请一个同学来口答单调性的证明.

生 15：任取 $0<x_1<x_2\leq 1$，$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{1}{x_1}-x_2^2-\frac{1}{x_2}=(x_1^2-x_2^2)+(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})=(x_1-x_2)[(x_1+x_2)-\frac{1}{x_1\cdot x_2}]=(x_1-x_2)[\frac{(x_1+x_2)x_1\cdot x_2-1}{x_1\cdot x_2}]$.

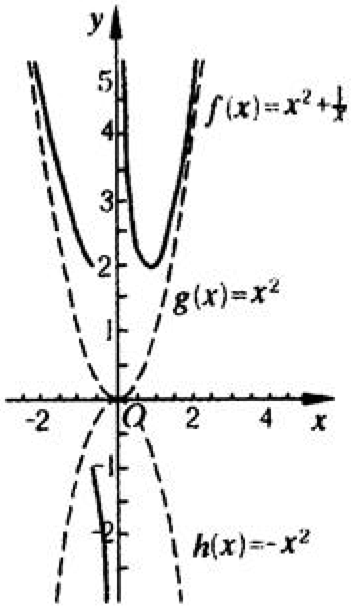

图 2

学生对寻找分类讨论的临界点还不够熟练，教师提示用不等式放缩，令分子等于零.

因为$0<x_1<x_2$，故$x_1-x_2<0$，$(x_1+x_2)x_1x_2-1<2x_2\cdot x_1x_2-1<2x_2^3-1\leqslant 0$. 当$0<x_1<x_2\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$时，$f(x_1)>f(x_2)$；当$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<x_1<x_2<+\infty$时，$f(x_1)<f(x_2)$，函数先减后增. 因此，当$x>0$且$x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$时，函数取得最小值(应为极小值)$f(x)_{极小值}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

师：刚才我们已经讨论了函数在$x>0$时的单调性和极小值，由变化趋势可以看出，上面图2中生14认为当$x=1$时，$y_{极小值}=2$，应修改为右面的图3. 另外，函数在$x<0$时的图象有问题吗？应该如何正确地描绘出图象？

问题一经抛出，学生像炸开锅似地进行了讨论. 经过一段时间的讨论，大家举手发言，气氛热烈！

生16：从函数表达式来看，函数在$x<0$时有定义，不应该是断开的.

生17：在x下方，我认为渐近线不是曲线$y=-x^2$，应该是直线$x=0$.

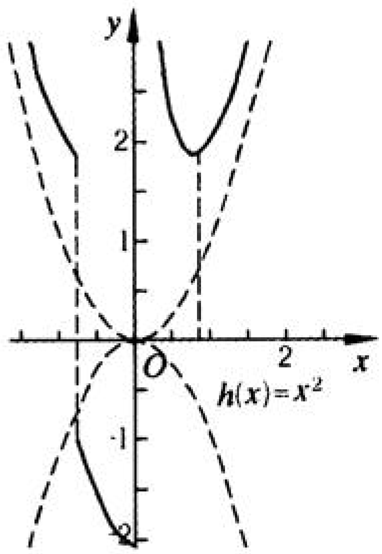

图3

生 18：我还发现当 x=-1 时 f（-1）=0，因此要连起来，函数图象过（-1，0）.

师：你上来修改一下.

（生 18 画出了图 4）

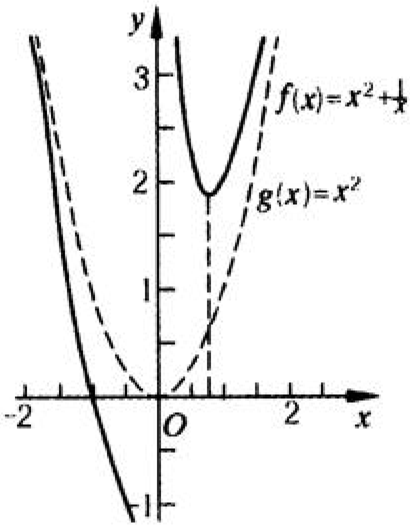

图 4

生 19：我感觉黑板上的图 4 还有问题，因为函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 图象是没有交点的（联立方程无解）.

师：对！生 19 的观察能力很强，那究竟哪个图象高呢？

生 20：作差，$y_1-y_2=x^2+\frac{1}{x}-x^2=\frac{1}{x}<0$（当 $x<0$ 时），因此当 $x<0$ 时，$y=x^2+\frac{1}{x}$ 的图象始终在 $y=x^2$ 的图象下方，并逐渐靠近它.

师：那么 $y=x^2+\frac{1}{x}(x<0)$ 的图象的弯曲程度如何描绘呢？

生 21：可以由几个特殊点确定.

师：不错.另外，研究函数弯曲程度（凹凸性）的方法请参见教材上的习题.

评注 此处，教师为学生课外的研究性学习（活动）埋下了伏笔.

讲到这里，教师运用几何画板精确地作出了函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 的图象（如图5）.

问题8 请研究函数 $y=x^2-\frac{1}{x}$ 的性质并画图.

（学生自主探究画出图象）

定义 一般地，形如 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}(a\neq 0)$ 的函数称为“牛顿三叉函数（Trident of Newton）”. 在近年的高考数学试题，特别是上海市高考中经常出现它的变形.

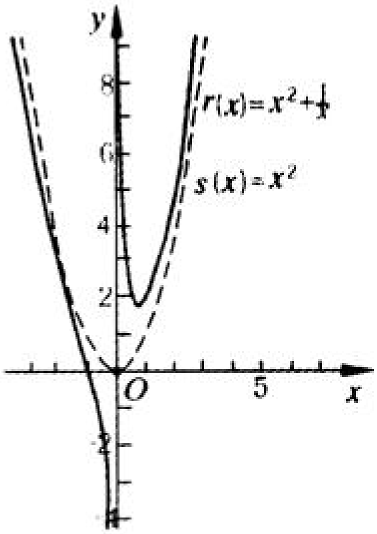

图5

5. 课堂小结

一般地，研究一个新函数，总是先研究函数的定义域、值域、最值（极大值、极小值）、单调性、奇偶性、零点、渐近线、周期性、对称性等基本性质，借助变化趋势、特殊点等描绘图象. 其中，函数的概念和基本性质是我们研究函数的切入点.

三、教学反思

1. 苏教版必修1教材中“函数”内容的编排值得商榷

笔者认为苏教版必修1函数部分的内容编排值得商榷. 目前的编排过于集中和抽象，集合部分刚讲完，马上就进入抽象函数的学习. 教材先讲抽象函数的性质，然后再介绍常用的函数. 也就是说，教材先从一般的、抽象的

函数概念再到特殊的、具体的函数.这种编排很可能和学生认知水平的发展是脱节的.众所周知，苏教版初中数学已经弱化了对学生逻辑推理能力的培养.因此，笔者建议高中函数部分应该先从学生熟悉的常见函数（一次函数、二次函数、反比例函数等）出发，对其加深拓宽，从性质探究其图象，从图象再研究其更进一步的性质.让学生了解这些特殊函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、最值等.在了解处理问题的通性通法的基础上，再进入抽象函数的更一般的研究.学会了特殊函数的研究方法后，再学习抽象函数的图象与性质，学生的学习就有了一个循序渐进的坡度，然后在学习抽象函数的过程中可以穿插类似于本课的新函数的探究，以此更好地提高学生的认知水平.

2.从学生的反馈来分析本课的适用范围需要谨慎

课后调查中学生反映：本课能够听懂，能明白老师教学的意图，但如果再给一个类似的新函数，估计还是有较大的困难.笔者认为：本课的函数模型选题偏难，其中还包含了一些超纲的内容（如复杂的渐近线、对称性），对于绝大多数的学校，特别是高一年级，教师在函数教学中，不宜把“牛顿三叉曲线”作为重点进行拓展.我们欣赏的是本课教学的设计思路，由问题驱动学生的学习，让学生带着问题去探究的授课理念.

3.设计微型课题，把研究性学习真正落实到课堂

本堂课教学目标明确，设计新颖，贴近重点中学优秀班级的学生实际.通过对教材素材的再加工，教师能恰当地处理好教材并且创造性地使用好教材.大部分的例习题均来自于课本或是来自于高考题的改编，体现了教材与高考的有机整合.高效有序的探究引领，不仅从知识上更是从方法上构建了数学文化，给学生指明了学习和科学研究的一般规律，学生学完了这一课以后，碰到类似的问题就有了解决问题的方向.

4.以学生为主体的微型课题研究，是一种生态课堂

生态课堂是指在课堂中，师生生态地从事各种教育学习活动，学生处在身心愉悦、舒服快乐的学习状态中.本课中教师能够面向全体学生，光是被提问到的学生就有 20 多人，还有很多学生上台板书，教师留出足够的时间让学生思考，观察了解学生的动态和问题.教师善于引导，学生大胆质疑、探索；教师充分渗透数学思想方法，学生充分进行互动式、探究式、讨论式的学习，师生之间的融洽关系奠定了探究的基础，让课堂真正成为充满人文关怀、情感滋润和生命享受的生态乐园.

5.利用集体智慧，挖掘教材内外，是校本教研的源泉

在本课中可以清晰地看到授课者对教材钻研的深度和广度，对教材理解和挖掘的做法其实就是教师设计微型课题并进行研究的方向.微型课题的研究可以采用以下方法进行：

（1）组织分工，收集资料：一部分老师专门收集期刊上的有关新教材的文章，另外一部分老师可以检索网络上的资源，然后分类整理.

（2）组织学习，交流看法：可以组织老师利用平时的时间学习相应的文章，加强理论学习，了解国内研究前沿的动态和方向，在备课组活动时进行交流学习体会.

（3）组织反思，案例研究：无论是观摩到的公开课还是自己上的展示课，进行教学的反思活动，可以是一课三议，三课一评，也可以是同题异构，师徒赛课.

（4）组织引领，科学指导：可以请一些名师、专家上门辅导、培训，在专家的引领下少走弯路，请专家指导研究的方法.

（5）组织推广，总结特色：在几年连续不断的微型课题研究中，不断地积累经验，发表成果，形成个人和学校的亮点和特色，形成个人和集体的研究课题和方向，在微型课题研究的引领下，不断总结提高.