

## 基于语言学视角的“说数学”探究

1981年“Cockcroft 报告”提出了“数学交流”. 报告指出, 教数学的主要理由在于“数学提供了有力的、简洁的和准确无误的交流信息的手段”[1]. 1992年我国举办的数学教育高级研讨班提出了“中国公民的数学素质包括数学意识、问题解决、逻辑推理、信息交流”的观点. 高中数学课程标准明确指出, 要重视学生的数学交流能力的培养. 可见, 数学交流引起了国际数学教育界的重视. 数学交流的形式有多种, 其中“说数学”是数学交流的重要形式之一. “说数学”是指个体用口头表达自己对数学问题的具体认识、理解, 解决数学问题的思路、思想和方法以及数学学习情感、体会等的数学学习活动. 它包括“说知识”、“说过程”、“说异见”和“说体会”. 它们分别指口头表达具体的数学知识, 个体解决某数学问题的过程, 口头表达个体对数学问题的结果的不同看法, 个体探究某数学问题后的情感体会. 在“说数学”实践中, 教师引导学生回答提问不仅给出解答结果, 还要说出结果是如何得到的; 注重引导学生自主总结当节课的主要内容、重点、难点和主要数学思想方法; 创设机会给学生介绍解题思路、解题时需注意的地方和解题体会; 创设尽多的机会让学生大胆发表自己对数学问题的不同见解, 有时还叫学生上讲台边板书边讲解自己对数学问题的不同看法等等. 教师对学生的“说”给予及时的激励性评价, 评价的内容有: 所说的数学知识是否正确, 数学语言运用是否正确、熟练, 数学学习情感(体会)和一般的口头语言表达能力情况等, 重视对学生“说”的纵横对比.

本文拟基于语言学理论, 采用案例研究法对“说数学”的实践展开探究.

### 二、“说数学”案例描述

在高一《直线与方程》复习课上, 教师 T 一上课就让学生们回顾这一章的主要知识, 然后请成绩属于中下水平的女生 W 说出她对这一章知识结构的认识. 她说: “直线方程有点斜式、斜截式、截距式、两点式、一般式”. 她未能主动说出这五种形式的方程分别是什么, 但在 T 的启发引导下, 她能逐一说出这五个方程. 接着 W 主动说出了点到直线的距离计算公式. T 将这些逐一板书在黑板上, 并及时表扬了女生 W: “W 能说出很多本章的主要知识, 有进步!”

在这一章“知识回顾”环节结束时, T 马上口头给出了以下问题(简称问题 1):

已知一个锐角三角形的三个顶点坐标, 如何求该三角形的面积?

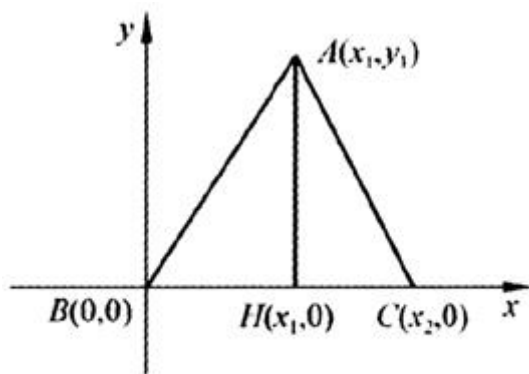


图 1

作图完毕后,他说:“要求  $\triangle ABC$  的面积,就要知道一条边长和这边上的高.由  $B(0,0), C(x_2,0)$  得  $|BC| = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = |x_2|$ .  $BC$  边上的高就是  $AH$ ,就是点  $A$  到直线  $BC$  的距离,用到点到直线的距离公式  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{1}{2} |BC| \cdot |AH|$ .”

在黑板上作图熟练,语言表述畅顺、清晰,能用适当的板书去辅助自己的“说”,非常自信.没有学生主动提出“异见”.为了把问题引向深入,达到复习主干知识的目的, T 向 L 提问:“你认为,要用到点  $A$  到直线  $BC$  的距离,这是正确的.但是在题目的条件中,没有直线  $BC$  的方程,该怎么办?”他马上指出:“ $B, C$  两点的坐标知道了,用点斜式或两点式就很容易求得,实际上,  $BC$  的方程就是  $y=0$ .”至此, L 将求已知三顶点坐标的三角形的面积计算问题的思路“说”清楚了.为了考验、提高 L 的“说”的能力, T 面向全班继续提问:“如果  $\triangle ABC$  是直角三角形,那么其面积如何计算?用到什么知识?” L 马上说:“用两点间距离公式能求到  $AC$  和  $BC$  的长度,  $\triangle ABC$  的面积就是  $AC$  和  $BC$  的长度的乘积的一半,很容易.”之后, L 非常高兴地回到座位上,脸上充满了成功的喜悦.

T 对 L 同学在讲台上的表现给予了高度评价:“L 同学的‘说’让老师感到非常惊讶,很佩服他. L 的思维很不错.请大家看看黑板上的图形, L 把  $\triangle ABC$  的一个顶点  $B$  放在坐标原点处,使得  $C$  在  $x$  轴上.如此建立坐标系非常好,使得问题解决更加简单,为我们的计算带来了简便,在今后的学习中还会经常遇到,值得注意.另外, L 同学在讲台上的语言有条理,姿态大方,逻辑推理正确,思路很清晰,有较强的应变能力”.这个问题的探究和“说”结束了.此时,全班学生的注意力非常集中,情绪高涨.

为了继续复习本章的基础知识和基本技能,本来 T 在课前准备让学生在堂上做完课本上的几道练习题,然后就讲评的,看到学生在上述问题中的精彩表现,顿时即兴对全班同学口头给出了另一个问题(简称问题 2):

已知一个梯形的四个顶点的坐标,如何证明该梯形是否为等腰梯形?

学生们安静地探究此问题. 大约 2 分钟后, 男生 Y 举手说: “老师, 我去说说这道题”. T 鼓励他上台说自己的解答. Y 在黑板上作出了图形(如图 2), 然后说: “这个问题很简单, 由这个图就可以知道,  $|DC| = 2$ ,  $|DM| = |CN| = 4$ ,  $DC \parallel AB$ . 所以 ABCD 是等腰梯形.” 此时, 台下学生热烈讨论, 女生 X 大声说: “这样肯定不行. 这不是证明!” “那你有什么想法?” T 问. 她直接走到黑板前, 徒手画了一个草图, 如图 3 所示, 接着说: “这种情况太特殊了. 我这个图形就不能那样算啊, 为什么底边一定会在 x 轴上呢?” 台下学生觉得女生 X 的想法有道理: “是啊”. T 问: “X 同学, 那你认为应如何解决这个问题?” 她把图 2 中的顶点给出了坐标(如图 3), 然后说: “我用这些坐标可以求出  $k_{DC}, k_{AB}$ , 如果  $k_{DC} = k_{AB}$ , 那么 DC, AB 就是梯形的底边. 然后用两点间的距离计算公式求出 AD, BC 的长. 如果  $AD = BC$ , 那么 AD, BC 就是这个梯形的两条腰.” 这时, 台下学生很安静, 没有什么“异见”了.

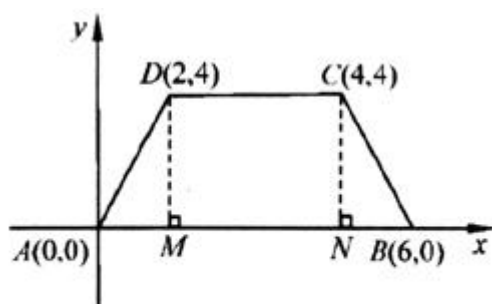


图 2

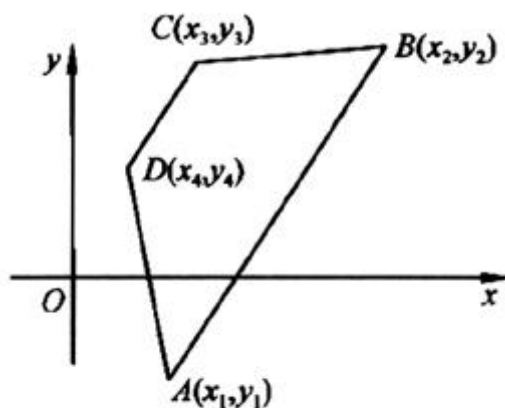


图 3

接着, T 给出了第三个问题(简称问题 3):

已知一个三角形的三个顶点的坐标, 如何求该三角形的外接圆的圆心坐标和半径大小?

T 请学生 C 到讲台上介绍自己的想法. 他在黑板上画了  $\triangle ABC$ , 并标出了三个顶点的坐标. 突然, C 转过头来问大家: “外接圆的圆心是三角形的三条高的交点吗? 我不记得了.” 台下有学生说: 中线的交点, 也有人说: 是中垂线的交点. C 看着 T 说: “我认为, 这圆心是中垂线的交点.” T 故意不作反应. 他继续作图, 用三角板大致地作出了 AB, AC 的中垂线, 交点为 O, 然后连结 OA, OB, OC. C 面向台下同学, 用三角板指着图形, 说: “ $\triangle ABC$  的外接圆的圆心就是这个三角形的三条边的中垂线的交点. 我取 AC, AB 的中点,

分别为 M, N, 作出了 AB, AC 的中垂线, 交点为 O. 因为 A, B, C 三个点的坐标都已经知道, 所以利用中点坐标公式可以求出 M, N 的坐标. 因为  $OM \perp AC$ ,  $ON \perp AB$ , 所以  $k_{AC} \cdot k_{OM} = -1, k_{AB} \cdot k_{ON} = -1$ .  $k_{AC}, k_{AB}$  都很容易求得到, M, N 的坐标又已知道了, 接着用点斜式就能求得 OM, ON 的方程了. 把这两个方程联立就能解得 O 的坐标, 这就是所求的圆心. 这个外接圆的半径就是  $r=OA=OC=OB$ , 用两点间的距离公式很快就能得到了.” T 及时对 C 的“说”进行评价: “C 说得很清楚, 很流畅, 能作图来辅助自己的解说, 很好. 他刚上台的时候, 对三角形的外心的概念不是很清晰. 大家要区分好三角形的外心、内心和重心(三心)的区别. 整体上看, C 的表现很不错. 谢谢 C 同学!”

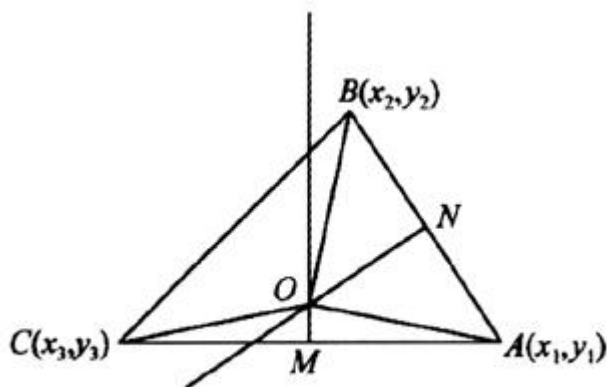


图 4

此时, 离下课时间还有 5 分钟, T 安排学生回顾本节课所讨论的三个问题的解决过程, 反思解决这些问题需要的主要知识有哪些. 一节《直线的方程》复习课就如此结束了.

### 三、基于语言学视角的“说数学”案例探究

知识是概念以及概念之间关系的系统, 而概念以及关系都是用一定的语言来表达的. 一定领域的知识具有自己特定的语言. 知识是用语言表征的, 它是知识的外在形式. 学习并非是学习者个体与知识之间的直接作用, 而必须要通过语言的中介[2].

#### (一) “说数学”暴露了学生的数学思维, 能提高学生的数学思维能力

对于数学教学来说, 语言活动是一项重要的数学活动. 在数学的教和学的活动中, 学生除了要有领会一般的自然语言的能力外, 还需逐步地了解和掌握数学中独有的语言特点. 由于数学意义必定要利用词语、符号等等来传达, 学生如果不能弄清, 或是不熟悉、不习惯数学语言的理解的方法、规律和约定, 那么就无法弄懂它们的意义, 结果会引起理解障碍. 前苏联著名心理学家维果茨基认为, 思维与语言两者之间有着紧密关系. 在语言表达的同时, 思想使自身得到了实现. 思维与语言的关系不是处于固定、静止的状态, 而是经历动态、变化的发展过程, 有着持续的思维到语言、语言到思维的来回往返的互动影响, 这种影响逐步促使个人在语言和思维两面能力的发展. 从思维到语言的过渡并不是一件易事. [3]

在这节课教师 T 只设计了三个问题, 积极鼓励学生对这些问题“说解法”, “说过程”, “说异见”, 及时评价了学生的“说”的表现. 学生通过“说”(口头语言)及时展示了自己对数学问题的思考结果和具体的思维过程.

“说”需学生快速地调动眼睛、耳朵、大脑等器官接收各种信息（含数学语言、文字语言和他人的口头语言），之后通过大脑及时搜索、整理信息，提出输出的方式、内容，最后口头表达出来。整个过程就是思维到语言的不断过渡、来回往返，充分暴露了学生对数学问题的思考过程。相对传统的数学学习来说，如此的学习方式加强了思维和口头语言之间的动态过渡，有利于学生的语言和思维能力的发展。

## （二）“说数学”是促进学生克服数学语言障碍的一种方法

数学语言的最大特殊之处，就是有一套符号系统，凝结了数学特有的抽象性、概括性，相对表象来说难以掌握和使用[3]。许多学生难以学好数学的重要原因之一是数学语言障碍。数学语言障碍是学习者在接受或运用数学语言信息时不能顺利进行识别、理解、组织、转换等活动的一种状态。按照不同的表达形式，数学语言障碍可分为文字语言障碍、图像语言障碍和符号语言障碍。根据数学语言能力的组成成分，按照层次、表现的不同，它又可分为：（1）数学语言识别障碍。（2）数学语言理解障碍。（3）数学语言转换障碍。（4）数学语言构造障碍。（5）数学语言操作障碍。（6）数学语言组织障碍。（7）数学语言表达障碍（含口头表达障碍和书面表达障碍）。[4]

表面上看，本节课只有三个问题，但是在学生的具体“说”的过程中，师生还即时性提出了很多具有启发性、反驳性的小问题。这些问题促进学生快速地进行数学语言识别、理解、转换、组织和表达等。如在问题1中，学生L首先对问题1的文字语言进行识别、理解，然后将这些文字语言转换成几何语言（图形），经过大脑组织之后，通过作图和口头表达出来。这个过程就是学生L克服系列数学语言障碍的过程。该学生若在文字语言、图像语言或符号语言方面存在障碍，则不可能面对老师和同学们大方、熟练、自如地“说”出对问题1的认识，更加不可能对T的即时提问给予反应。所以，如此的“说”促进了学生克服数学语言障碍。

## （三）“说数学”让数学学习效果反馈更及时、快速和有效

研究表明，学生的语言能力与数学学习的成绩存在着一定的相关性[3]。也就是说，学生的语言表达情况能在一定程度上反应他们的数学学习情况。传统数学教学中，教师较多通过学生的书面表达（解题过程和结果）去了解数学教学效果。如此反馈相对较缓慢。“说数学”是数学交流活动的一种口头交流形式。通过“说”，教师和学生都能较快地了解到“说者”的数学学习情况（包括知识、过程、思想和方法以及情感、态度与价值观等）。在上述问题2的教学中，学生Y和X的看法发生了严重“冲突”。X及时“说异见”，并非常自信地“说”出了自己的问题2的解决思路，征服了全班同学。又如，在问题1的教学中，虽然不少问题是老师经过适当变式给出的，但是L站在讲台上能快速反应并作答，说明他对系列问题涉及的知识非常熟练。所以，通过“说”，教师和学生都能很及时、快速、有效地了解到“说者”的数学学习情况；教师能在诊断学生的学习问题时，注意他们诸如语言表达、语言与思维转换的问题，以便有针对性地帮助学生解决学生数学学习中的思维与语言的两个侧面的问题。即“说数学”是一种较好的数学学习反馈方式。

## （四）“说数学”能促进能力多元发展

维果茨基认为,内部语言是介于内部思维活动与外部语言活动之间的有很大功能的一种活动,其心理活动表现为产生符号和词感的心理机制,最后与社会交流联系起来.内部语言有自己独立的功能.它有语言的形式,但主要目的不是要陈述出来作交流,而是为了产生出思想.由于内部语言活动更多地偏向于用语义,而且不是靠确切的词和句进行思维,因而引起了它的句法的独特性.这一独特性使得内部活动转化为外部活动不是一种简单性的由内而外的复制过程,而是一个动态的、复杂的转换过程.要转换到别人可理解的程度,就须兼顾到外部语言的特点.数学学习中的一些思维过程较多地借助内部语言活动来实施.学生一步一步地推理,在脑海中尝试进行时,就不会是完整、连贯、细枝末节都面面俱到的.这种思维形式要最终转化为书面的、前因后果有条不紊的证明语言,就可能出现语言上的难点和问题.[3]

在问题3的教学过程中,学生C能根据题目的文字语言较规范地作出具体图形(将文字语言转换成图形语言),然后结合图形口头表达自己对问题3的整个思考过程(转换成口头语言).C的问题解决思路非常清晰,口头表达的逻辑性强,条理性好,语速得当,姿态大方.这些都是学生C的内部语言转换成外部语言的结果,是外显行为表现.其实,即使他内心对问题3的解答过程很清楚,但是要顺畅、得当、大方地“说”给师生听,能让“听者”听得懂、易理解就很不容易.这体现了学生C的多元能力(如语言运用能力,逻辑推理能力,肢体运作能力和内省能力等)水平.学生能理解或者完全正确地解决某个数学问题,但不一定能将该问题的解决思路归纳总结出来,不一定能将解题过程顺畅地、有一定逻辑性地表达出来,或尽管表达出来了,也许难以被“听者”理解.也就是说,学生C“说”的能力是经过培养和锻炼的.所以“说数学”能促进学生能力的多元发展.

#### 四、结束语

《普通高中数学课程标准(实验)》指出,数学教学不仅要关注学生的数学学习结果,也要关注学生的数学学习过程,要重视对学生数学能力的培养.上述“说数学”教学案例无疑践行了这理念.笔者以为,如何评价学生“说”的能力水平,如何激发学生“说”的积极性,如何处理学生“做”与“说”的关系还有待研究.