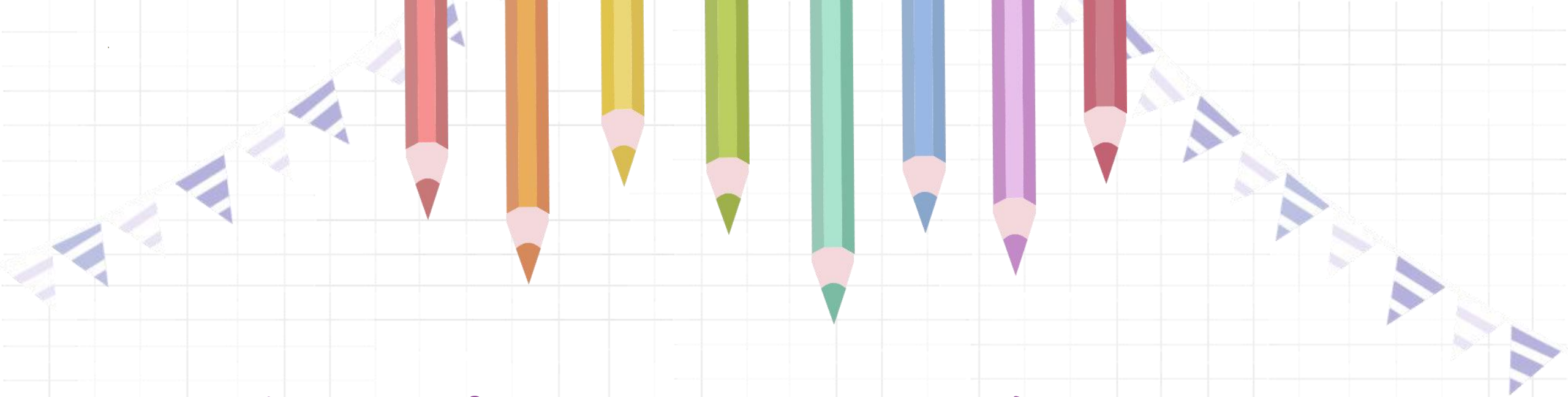




第六章 平面向量及其应用

6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示





教学目标

- 1.掌握数乘向量的坐标运算法则.
- 2.理解用坐标表示两向量共线的条件.
- 3.能根据平面向量的坐标,判断向量是否共线,并掌握三点共线的判断方法.



PART.01

情境导入





温故知新

1. 平面向量的坐标表示

已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

即一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去始点的坐标.

2. 平面向量的加、减运算的坐标表示

已知 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$.

则 $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.



两个向量和（差）的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和（差）.



PART.02

平面向量数乘的坐标表示





概念讲解

探究：已知 $\vec{a} = (x, y)$ ，你能得出 $\lambda\vec{a}$ 的坐标吗？

$$\lambda\vec{a} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j}) = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j},$$

$$\text{即 } \lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y).$$

这就是说，**实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.**

定义

平面向量数乘运算的坐标表示

实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.





例题剖析

例1. 已知 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-3, 4)$, 求 $3\vec{a} + 4\vec{b}$ 的坐标.

$$\text{解: } 3\vec{a} + 4\vec{b} = 3(2, 1) + 4(-3, 4)$$

$$= (6, 3) + (-12, 16)$$

$$= (-6, 19).$$

$$\text{已知 } \vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2). \text{ 则 } \lambda\vec{a} \pm \mu\vec{b} = (\lambda x_1 \pm \mu x_2, \lambda y_1 \pm \mu y_2)$$



例题剖析

练习：已知 $A(-2,4)$, $B(3,-1)$, $C(-3,-4)$, 且 $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CB}$, 求点 M , N 的坐标.

解：∵ $A(-2,4)$, $B(3,-1)$, $C(-3,-4)$,

$$\therefore \overrightarrow{CA} = (-2,4) - (-3,-4) = (1,8), \quad \overrightarrow{CB} = (3,-1) - (-3,-4) = (6,3).$$

$$\because \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CB}, \quad \therefore \overrightarrow{CM} = 3(1,8) = (3,24), \quad \overrightarrow{CN} = 2(6,3) = (12,6).$$

设 $M = (x_1, y_1)$, $N = (x_2, y_2)$,

$$\therefore \overrightarrow{CM} = (x_1 + 3, y_1 + 4) = (3,24), \quad \overrightarrow{CN} = (x_2 + 3, y_2 + 4) = (12,6),$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + 3 = 3 \\ y_1 + 4 = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + 3 = 12 \\ y_2 + 4 = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 20, \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = 9, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

$$\therefore M = (0,20), \quad N = (9,2).$$



PART.03

坐标运算表示共线问题





概念讲解

探究：如何用坐标表示两个向量共线的条件？

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 其中 $\vec{b} \neq \vec{0}$.

我们知道, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

如果用坐标表示, 可写为 $(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$, 即 $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}$

消去 λ , 得 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

定义

平面向量共线的坐标表示

向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线的充要条件是 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$





例题剖析

例2. 已知 $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (6, y)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 求 y .

解: 因为 $\vec{a} // \vec{b}$, 所以 $4y - 2 \times 6 = 0$. 解得 $y = 3$.

练习: 已知平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, m)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $2\vec{a} + 3\vec{b}$ 等于_____.

解: 因为 $\vec{a} // \vec{b}$,

所以 $m - 2 \times (-2) = 0$. 解得 $m = -4$, 即 $\vec{b} = (-2, -4)$.

所以 $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \cdot (1, 2) + 3 \cdot (-2, -4) = (2, 4) + (-6, -12) = (-4, -8)$.



例题剖析

例3. 已知 $A(-1, -1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 5)$, 判断 A , B , C 三点之间的位置关系.

解: 在平面直角坐标系中作出 A , B , C 三点(如图). 观察图形,

我们猜想 A , B , C 三点共线. 下面来证明.

因为 $\overrightarrow{AB} = (1 - (-1), 3 - (-1)) = (2, 4)$,

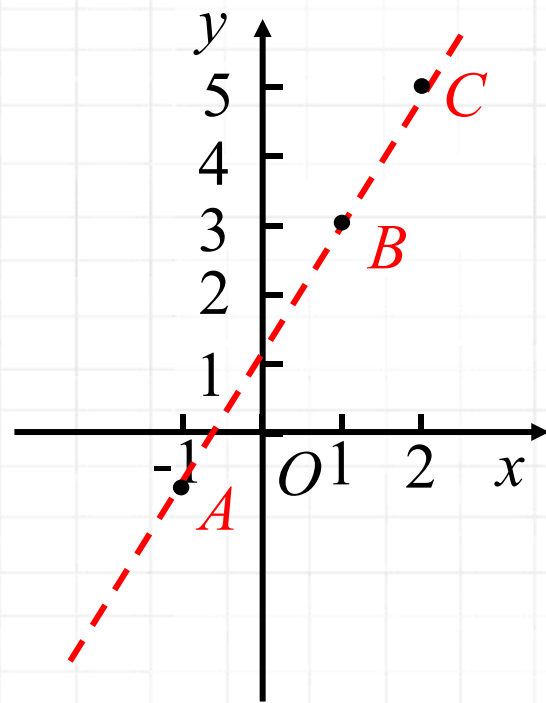
$\overrightarrow{AC} = (2 - (-1), 5 - (-1)) = (3, 6)$,

又 $2 \times 6 - 4 \times 3 = 0$,

所以 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$.

又直线 AB , 直线 AC 有公共点 A ,

所以 A , B , C 三点共线.





例题剖析

练习：已知 $A(2,1)$ ， $B(0,4)$ ， $C(1,3)$ ， $D(5,-3)$ ，判断 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是否共线？如果共线，它们的方向是相同还是相反？

解： $\overrightarrow{AB} = (0,4) - (2,1) = (-2, 3)$ ， $\overrightarrow{CD} = (5,-3) - (1,3) = (4, -6)$ 。

法一： $\because (-2) \times (-6) - 3 \times 4 = 0$ ，

$\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，通过观察可知， $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 方向相反。

法二： $\because \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线且方向相反。



PART.04

定比分点





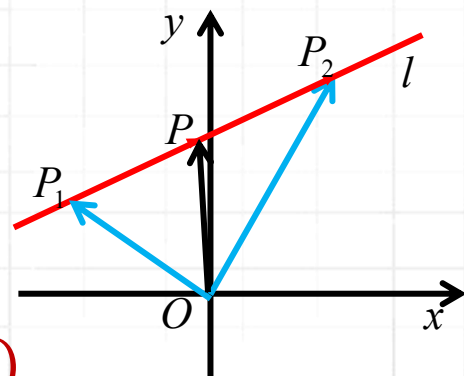
例题剖析

例4. 设 P 是线段 P_1P_2 上的一点, 点 P_1, P_2 的坐标分别是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

(1) 当 P 是线段 P_1P_2 的中点时, 求点 P 的坐标;

解: (1) 如图, 由向量的线性运算可知

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right). \text{ 所以, 点 } P \text{ 的坐标是 } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$



定义

中点坐标公式

若点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 线段 P_1P_2 的中点 P 的坐标

为 (x, y) , 则 $\begin{cases} x = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y = \frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$, $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 为线段的中点坐标公式.





例题剖析

(2) 当 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时, 求点 P 的坐标.

解: (2) 如图, 当 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时, 有两种情况,

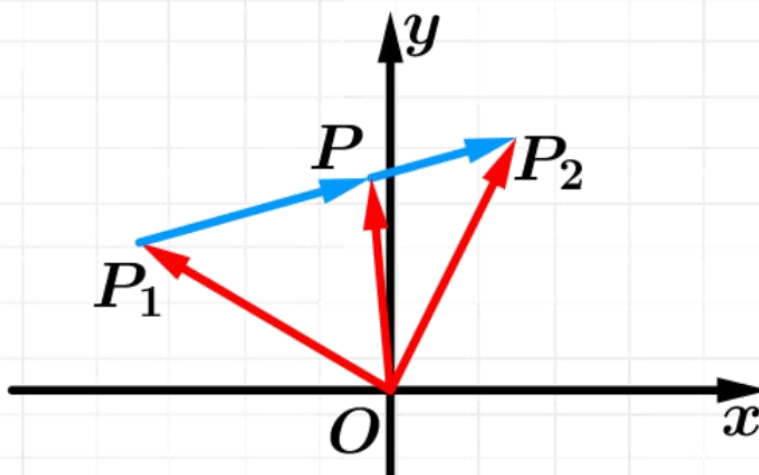
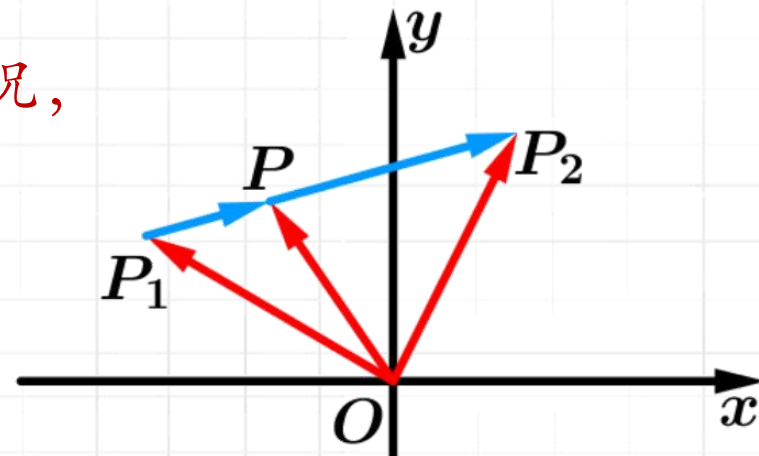
即 $\overrightarrow{P_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}$ 或 $\overrightarrow{P_1P} = 2\overrightarrow{PP_2}$.

如果 $\overrightarrow{P_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}$, 那么

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2} \\ &= \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_2} = \left(\frac{2x_1+x_2}{3}, \frac{2y_1+y_2}{3}\right),\end{aligned}$$

即点 P 的坐标是 $\left(\frac{2x_1+x_2}{3}, \frac{2y_1+y_2}{3}\right)$.

同理, 如果 $\overrightarrow{P_1P} = 2\overrightarrow{PP_2}$, 那么点 P 的坐标是 $\left(\frac{x_1+2x_2}{3}, \frac{y_1+2y_2}{3}\right)$.





概念讲解

探究：如图，线段 P_1P_2 的端点 P_1 ， P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，点 P 是直线 P_1P_2 上的一点.当 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$ 时，点 P 的坐标是什么？

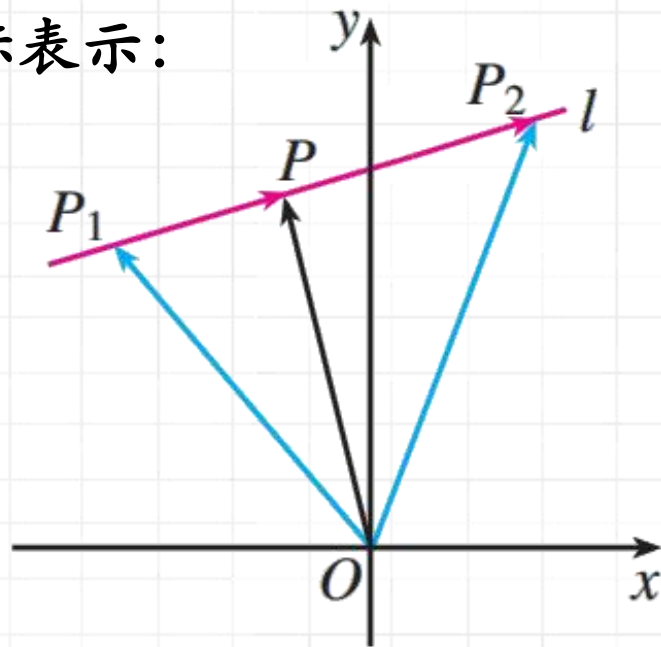
解：由已知 $\lambda \neq -1$ ，可以设点 $P(x, y)$ ，将 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$ 用坐标表示：

$$(x - x_1, y - y_1) = \lambda(x_2 - x, y_2 - y).$$

由此可得：
$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases}$$

于是，
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

即点 P 的坐标是
$$\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right).$$





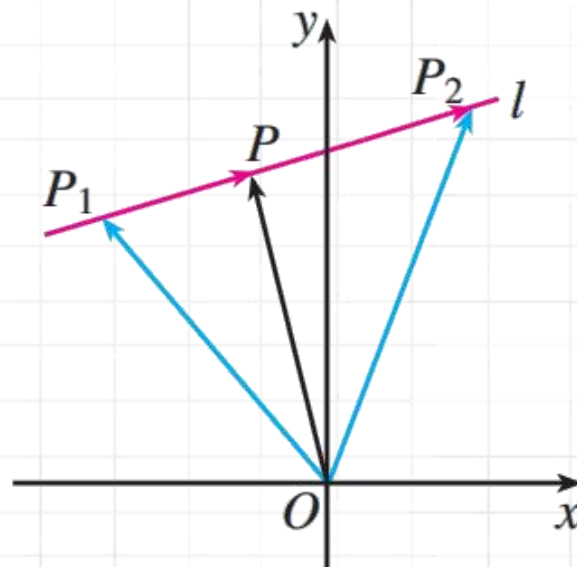
概念讲解

定义

定比分点公式

存在一个实数 λ ，使 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$ ， λ 叫做点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比，

则 P 点的坐标公式为 $(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda})$.





例题剖析

例5. 已知点A(3, -4)与点B(-1, 2), 点P在直线AB上, 且 $|\overrightarrow{AP}| = 2|\overrightarrow{PB}|$, 求点P的坐标.

解: 设点P的坐标为(x, y), $|\overrightarrow{AP}| = 2|\overrightarrow{PB}|$.

① 当P在线段AB上时, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$,

$$\therefore (x - 3, y + 4) = 2(-1 - x, 2 - y),$$

$$\therefore \begin{cases} x - 3 = -2 - 2x \\ y + 4 = 4 - 2y \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases}. \therefore \text{点P的坐标为 } (\frac{1}{3}, 0).$$



概念讲解

例5. 已知点A(3, -4)与点B(-1, 2), 点P在直线AB上, 且 $|\overrightarrow{AP}| = 2|\overrightarrow{PB}|$, 求点P的坐标.

② 当P在AB延长线上时, $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PB}$,

$$\therefore (x-3, y+4) = -2(-1-x, 2-y),$$

$$\therefore \begin{cases} x-3 = 2+2x \\ y+4 = -4+2y \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -5 \\ y = 8 \end{cases}, \therefore \text{点P的坐标为}(-5, 8).$$

综上所述, 点P的坐标为 $(\frac{1}{3}, 0)$ 或 $(-5, 8)$



PART.05

课堂小结





课堂小结

平面向量数乘运算的坐标表示

数乘的坐标表示

共线向量的坐标表示

定比分点定理