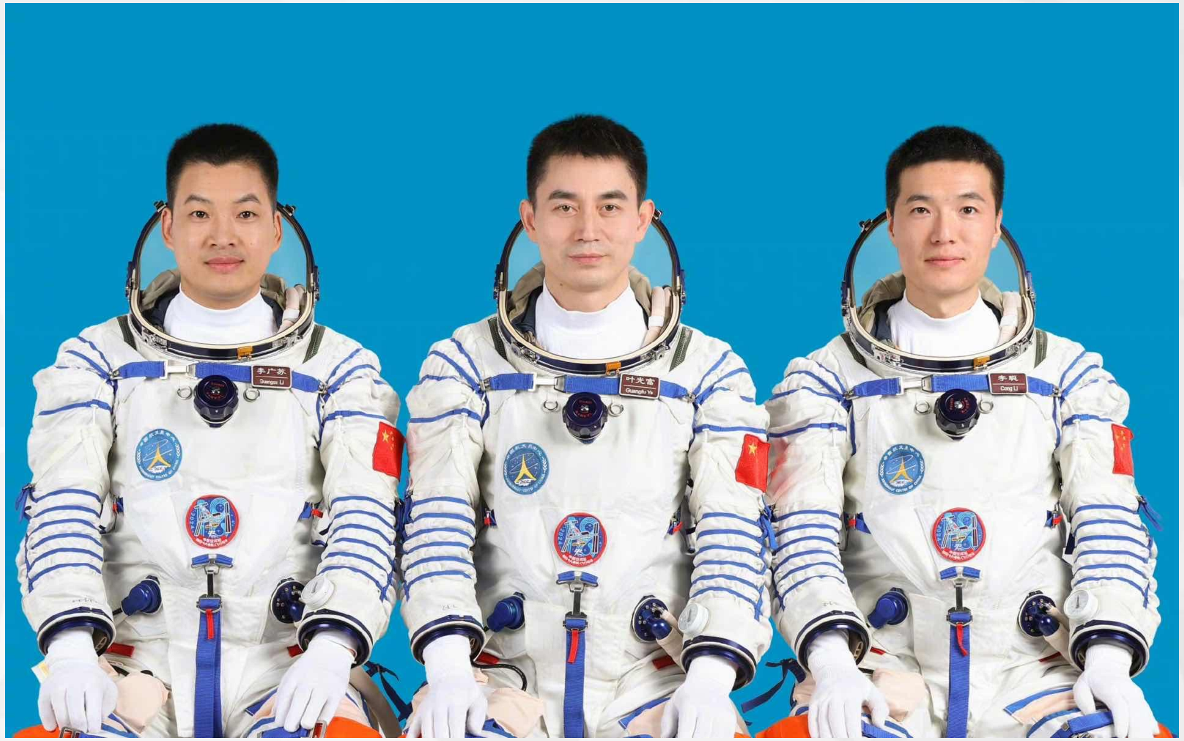
椭圆的定义及其标准方程

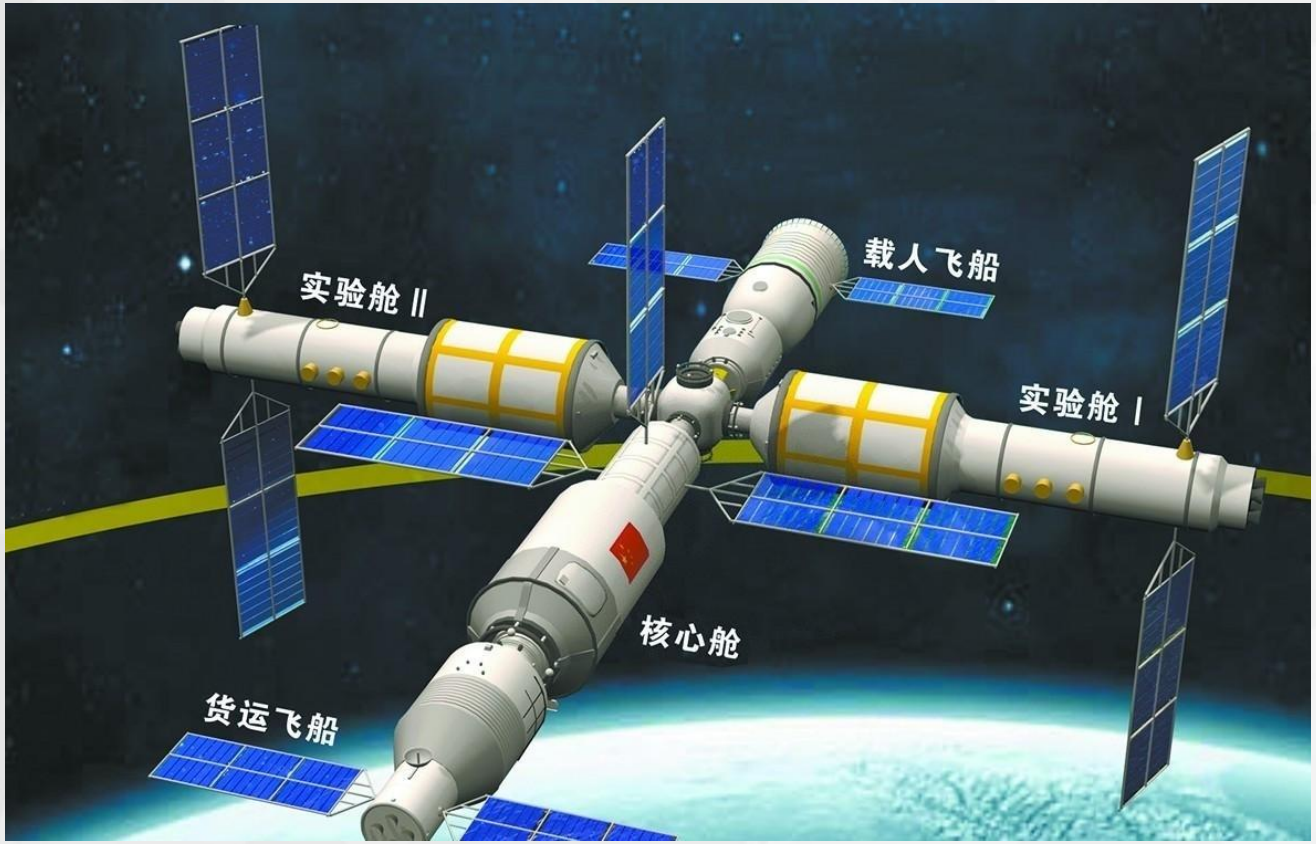
创设情境，激发兴趣

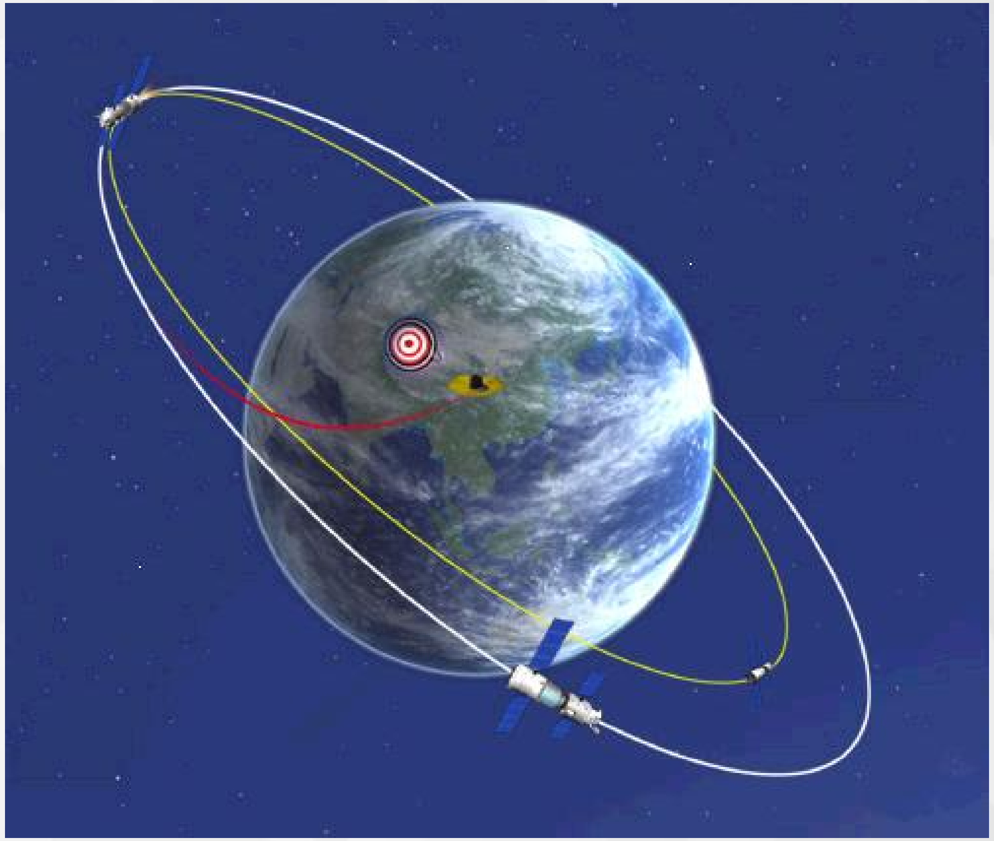
李广苏　　叶光富　　李 聪



2024年4月25日，搭载神舟十八号载人飞船的长征二号F遥十八运载火箭在酒泉卫星发射中心点火发射，发射取得圆满成功。这是空间站应用与发展阶段第3次载人飞行任务，也是载人航天工程第32次飞行任务。

神舟飞船在进入太空后，先以远地点347公里、近地点200公里的**椭圆轨道**运行，后经过变轨调整为距地343公里的**圆形**轨道.

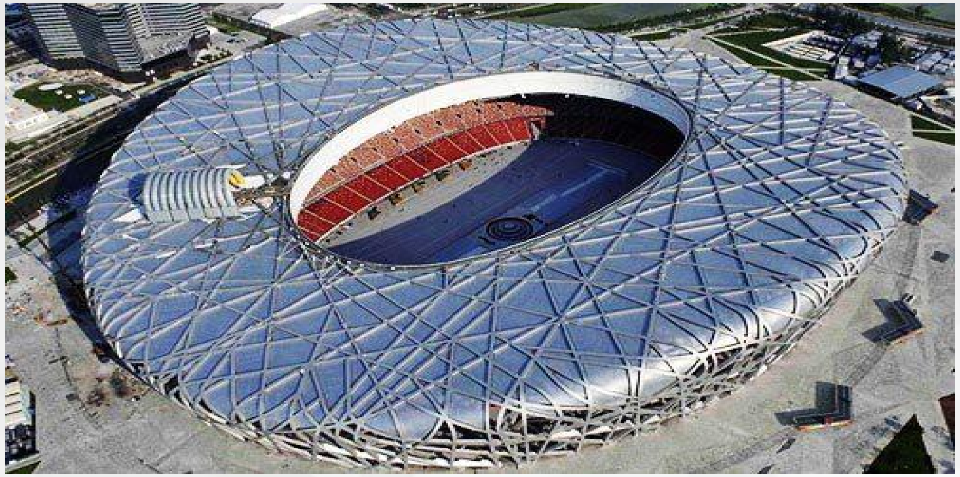


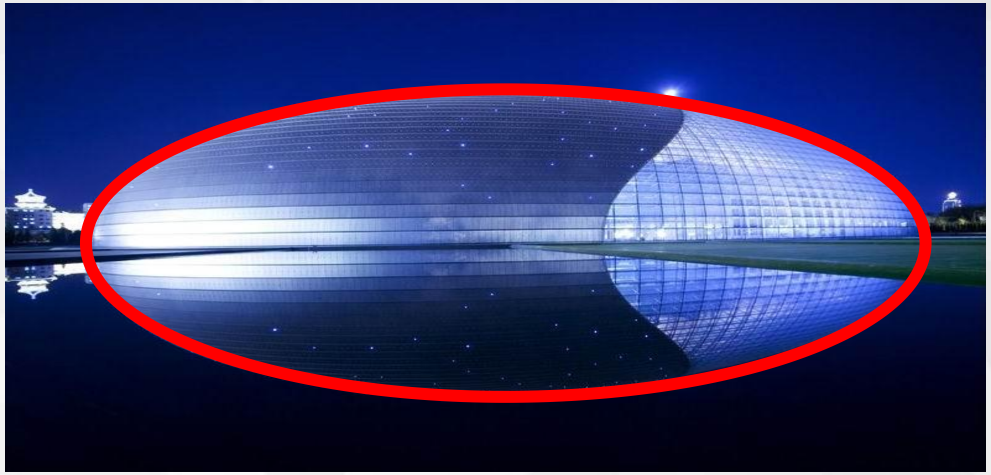


说一说

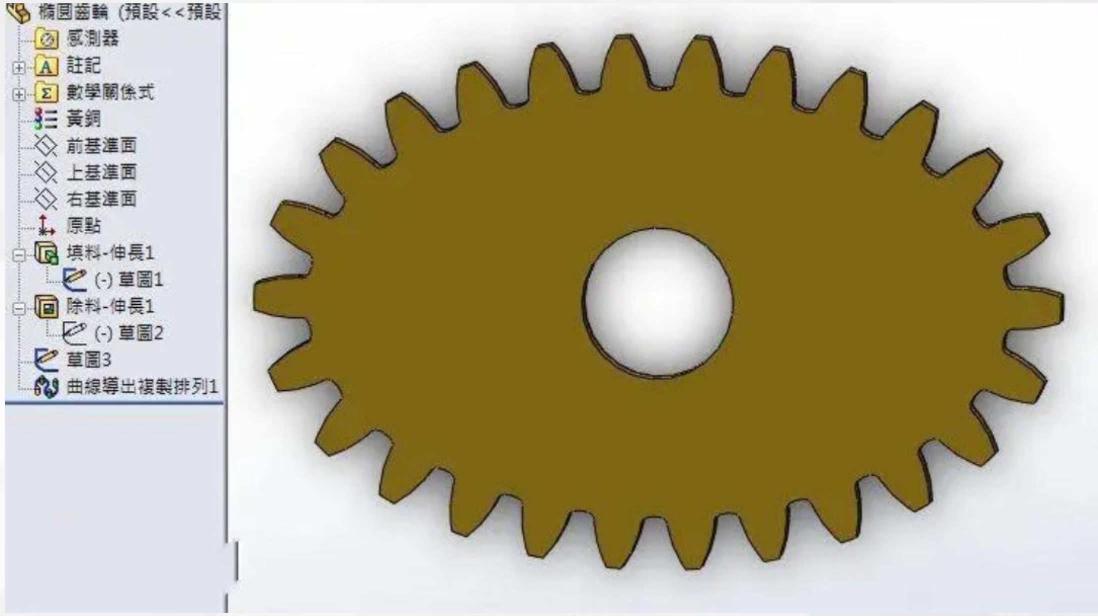
生活中的椭圆

生活中的椭圆

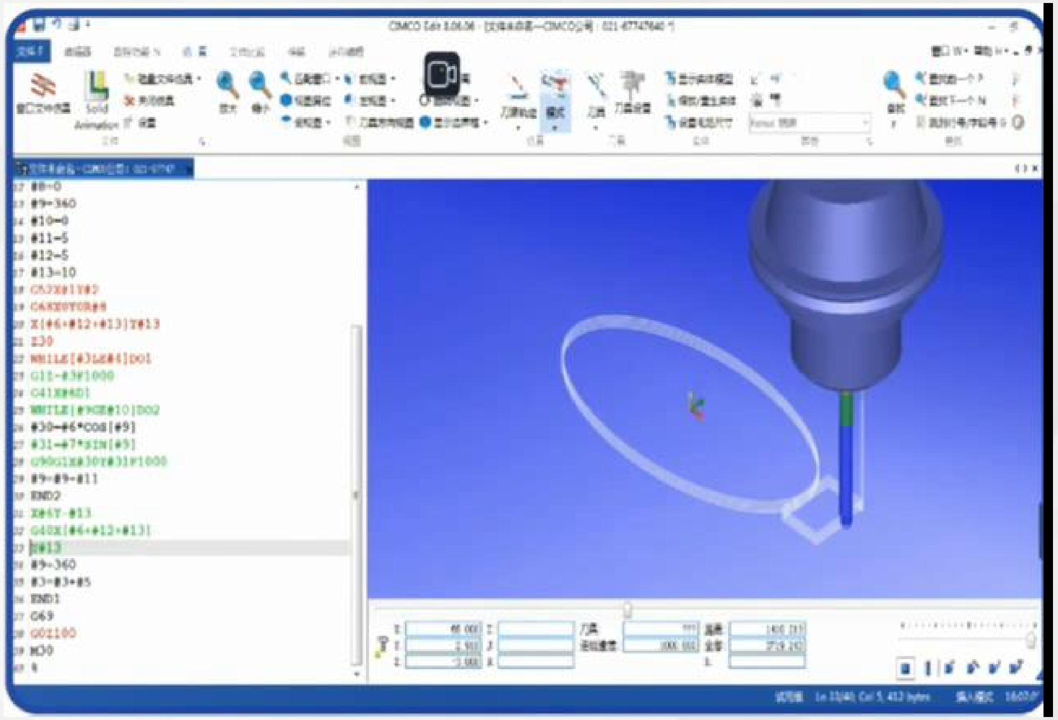




专业中的椭圆


橢圓齒輪 (預設<<預設
感測器
註記
數學關係式
黃銅
前基準面
上基準面
右基準面
原點
填料-伸長1
(-) 草圖1
除料-伸長1
(-) 草圖2
草圖3
曲線導出複製排列1

专业中的椭圆



这些美的椭圆该如何精确地设计、制作呢?

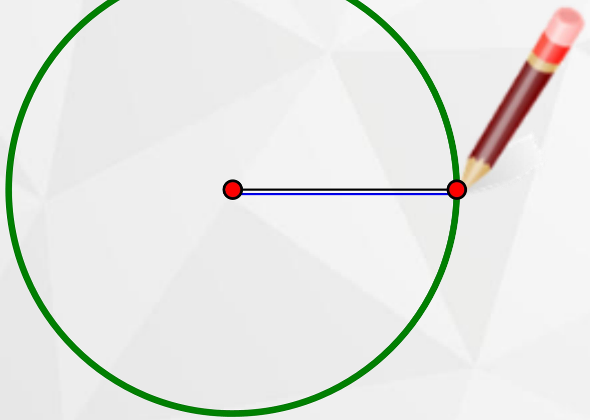
互动探究，形成概念

你是否还记得圆是怎么画出来的?
用手中的绳怎么画一个圆?

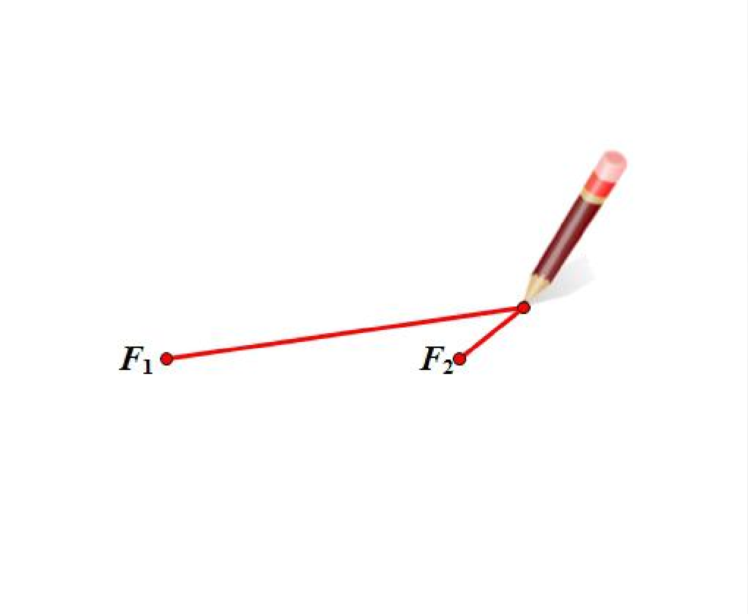
画一画

探究：动手做数学实验.

取一条定长的细绳，把它的两端都固定在图板的同一点F，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，这时笔尖(动点)画出的轨迹是一个圆.



如果把细绳的两端拉开一段距离，分别固定在图板的两点F_1,F_2.套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，画出的轨迹是什么曲线?



想一想

探究：动手做数学实验，并用类比的数学思想探究以上操作过程有哪些变与不变的量.

（1）在画出一个椭圆的过程中，F_1、F_2的位置是固定的还是运动的?

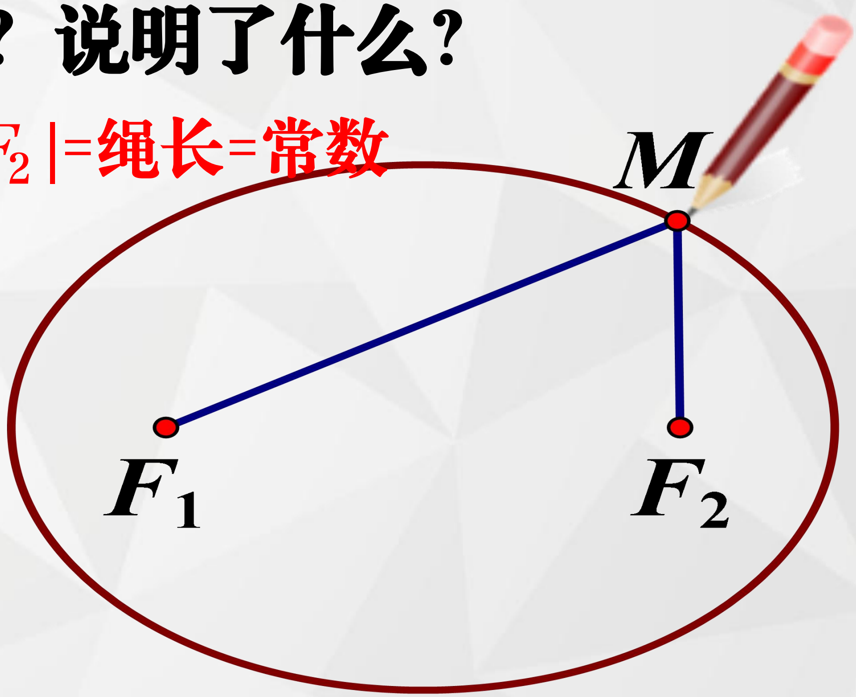
固定的

（2）在画椭圆的过程中，绳子的长度变了没有？说明了什么?

没有　　$|MF_1|+|MF_2|=$绳长$=$常数

（3）在画椭圆的过程中，绳子长度与两定点距离大小有怎样的关系?

$|MF_1|+|MF_2|=$绳长$>|F_1F_2|$



探究：动手做数学实验，并用类比的数学思想探究以上操作过程有哪些变与不变的量.

取一条定长的细绳，把它的两端都固定在图板的同一点F，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，这时笔尖(动点)画出的轨迹是一个圆.

笔尖移动过程中，绳长保持不变，笔尖到该定点的距离的和等于**常数**。

圆的定义： $|MC|=$常数

如果把细绳的两端拉开一段距离，分别固定在图板的两点F_1,F_2.套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，画出的轨迹是什么曲线?

笔尖移动过程中，绳长保持不变，笔尖到两个定点的距离的和等于**常数**。

椭圆的定义：

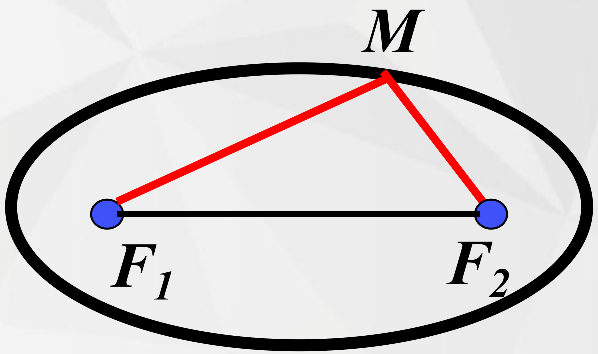
$|MF_1|+|MF_2|=$常数$>|F_1F_2|$

1.椭圆的定义

我们把平面内与**两个定点**F_1,F_2的**距离的和**等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作**椭圆**. 这两个定点叫做椭圆的**焦点**，两焦点间的距离叫做椭圆的**焦距**.

记焦距为$2c$，椭圆上的**点**M**与**F_1, F_2**的距离的和**记为$2a$。

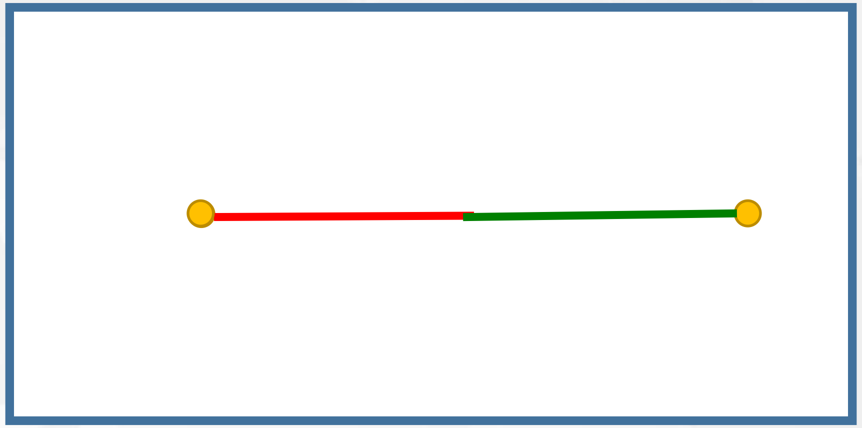
$$|MF_1|+|MF_2|=2a \quad (|F_1F_2|=2c,\ 2a>2c>0)$$



思考　　为什么要求 $2a>2c$?

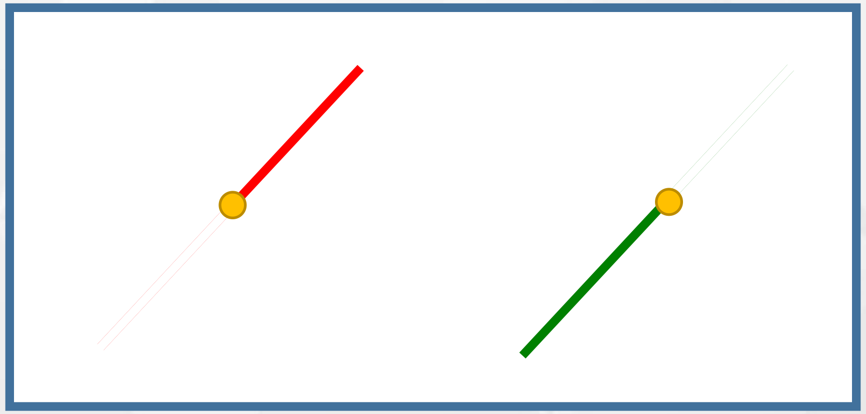
当绳长**等于**两定点间距离，即$2a=2c$时，

轨迹为线段



当绳长**小于**两定点间距离，即$2a<2c$时，

无轨迹



练习巩固，知识运用

(1)已知A(-3,0),B(3,0),M点到A,B两点的距离和为10,则M点的轨迹是什么?

椭圆

(2)已知A(-3,0),B(3,0),M点到A,B两点的距离和为6,则M点的轨迹是什么?

线段AB

(3)已知A(-3,0),B(3,0),M点到A,B两点的距离和为5,则M点的轨迹是什么?

不存在

感悟:(1)若$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2|$,M点轨迹为椭圆.

(2)若$|MF_1|+|MF_2|=|F_1F_2|$,M点轨迹为线段.

(3)若$|MF_1|+|MF_2|<|F_1F_2|$,M点轨迹不存在.

数形结合，方程建构

求曲线方程的步骤是什么?

(1)建立适当的坐标系，设曲线上任意一点M的坐标为(x, y);

(2)找出限制条件$p(M)$;

(3)把坐标代入限制条件$p(M)$，列出方程$f(x, y)=0$;

(4)化简方程 $f(x, y)=0$;

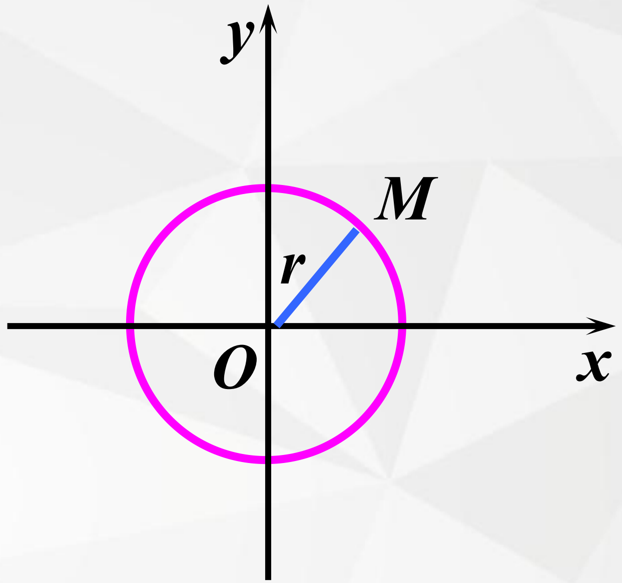
(5)检验(可以省略,如有特殊情况，适当说明).

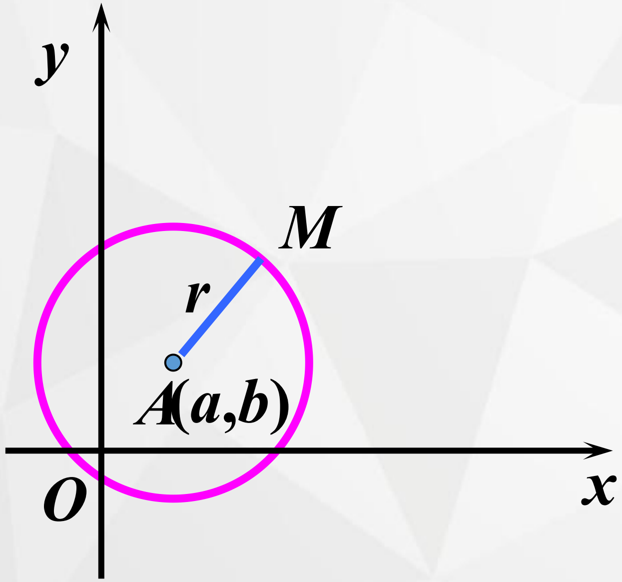
建设限代化

思考 结合椭圆的几何特征，你认为怎样选择坐标系才能使椭圆的方程简单?

类比探究

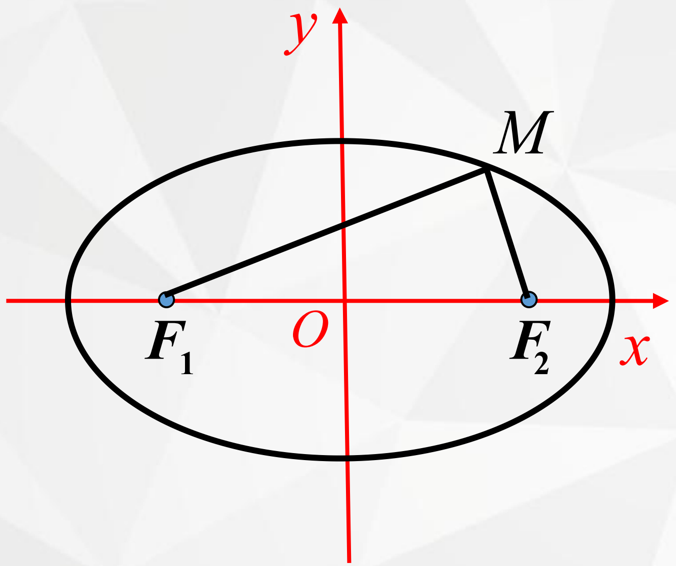
$$x^2 + y^2 = r^2$$



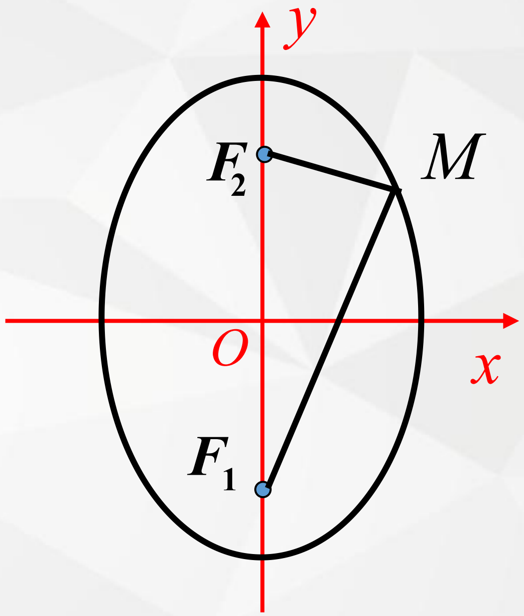


$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

探讨：建立平面直角坐标系的方案



方案一



方案二

建立平面直角坐标系一般遵循的原则：对称、简洁

建

设

限

代

化

经过椭圆两焦点F_1, F_2的直线为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系

设椭圆的焦距为$2c\,(c>0)$，设$M(x,y)$是椭圆上任意点　$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$

$$|MF_1|+|MF_2|=2a$$

$$\sqrt{[x-(-c)]^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

移项得：$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

两边平方得：$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

整理得：$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

再平方得：$a^4+c^2x^2=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$

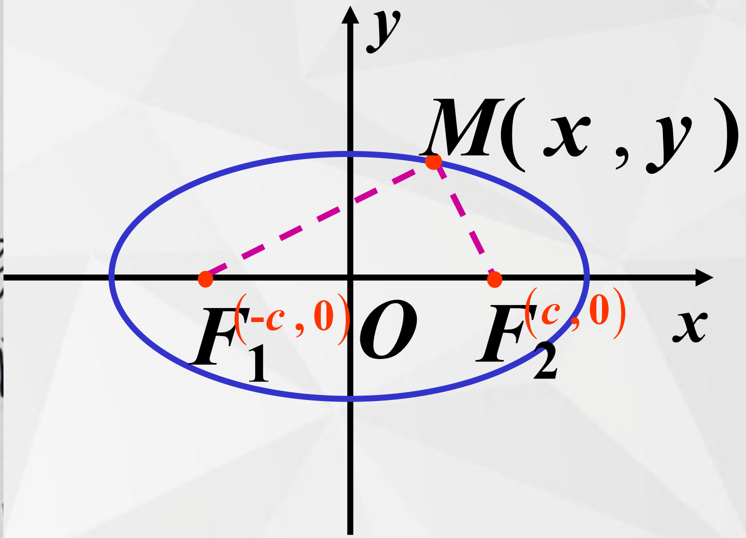
整理得：$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$\because a>c>0 \Rightarrow a^2-c^2>0$

设$a^2-c^2=b^2\ (b>0)$

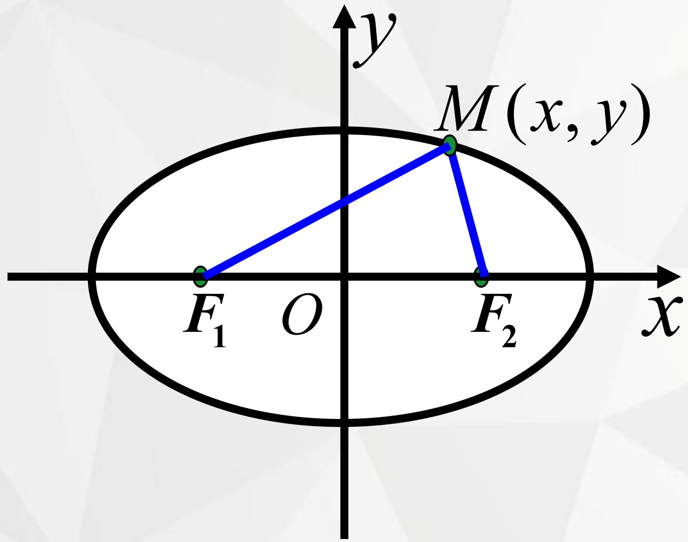
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

同时除以a^2b^2　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



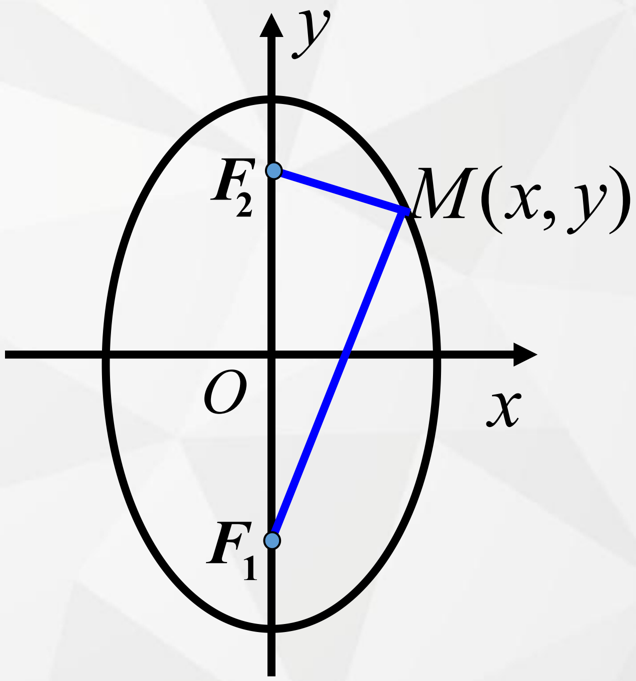
2.椭圆的标准方程

焦点在 x 轴上



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

思考：焦点在y轴上的标准方程是什么？



建

设

限

代

化

以椭圆长轴为y轴，短轴为x轴建系

设$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，$P(x,y)$

$$|MF_1|+|MF_2|=2a$$

$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a$$

移项得 $\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y-c)^2}$

两边平方得 $x^2+(y+c)^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+(y-c)^2$

整理得 $a^2-yc=a\sqrt{x^2+(y-c)^2}$

再平方得 $a^4-2a^2yc+y^2c^2=a^2x^2+a^2(y-c)^2$

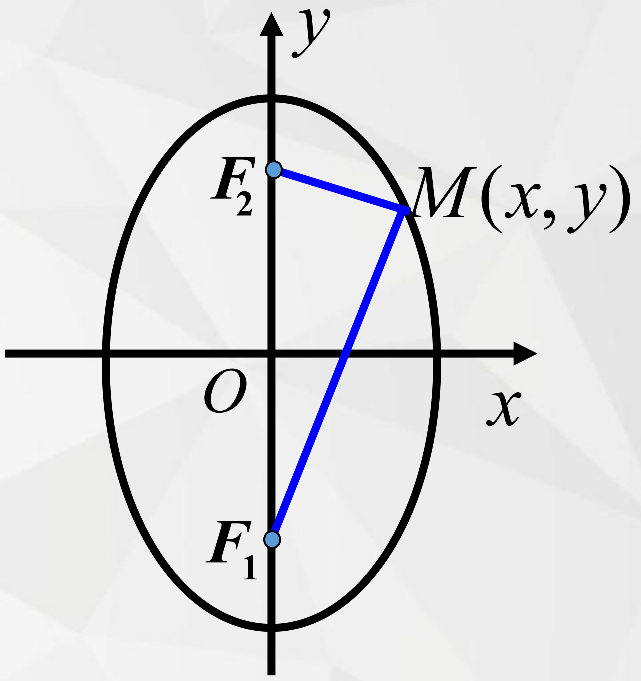
整理得 $a^2x^2+(a^2-c^2)y^2=a^2(a^2-c^2)$

$\because a>c \quad a^2>c^2$

$\therefore$ 设 $a^2-c^2=b^2$

$ax^2+b^2y^2=a^2b^2$

同时除a^2b^2 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$



建

设

限

代

化

建系 （对称性）以两定点所在直线为x轴，线段F_1F_2中垂线为y轴，建立平面直角坐标系.

设点 设$M(x,y)$是椭圆上任意一点

由题意 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$

限制条件 $|MF_1|+|MF_2|=2a$

代入数学公式 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

化简

令 $\begin{cases}(x+c)^2+y^2=(a+d)^2 & (1)\\ (x-c)^2+y^2=(a-d)^2 & (2)\end{cases}$

中项模型

$(1)-(2)$ $4cx=4ad$

$d=\frac{cx}{a}$ 代入(1)中

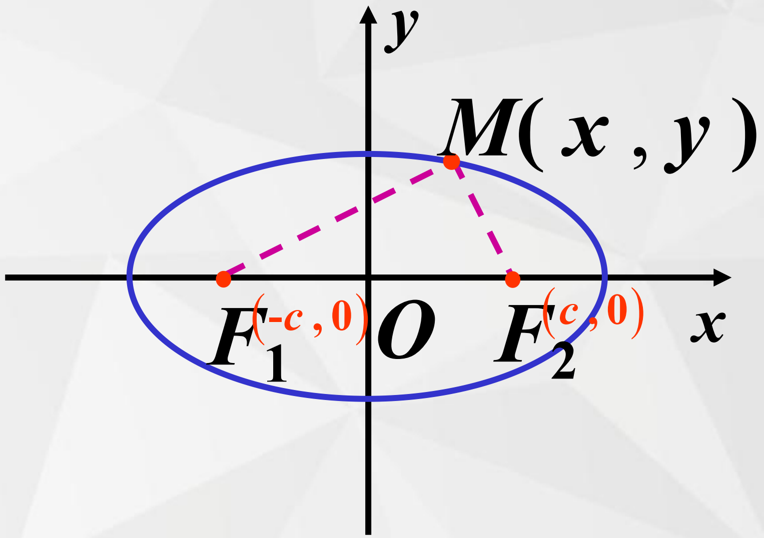
$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx$

得 $\frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2$

即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$

令 $b^2=a^2-c^2$

则 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

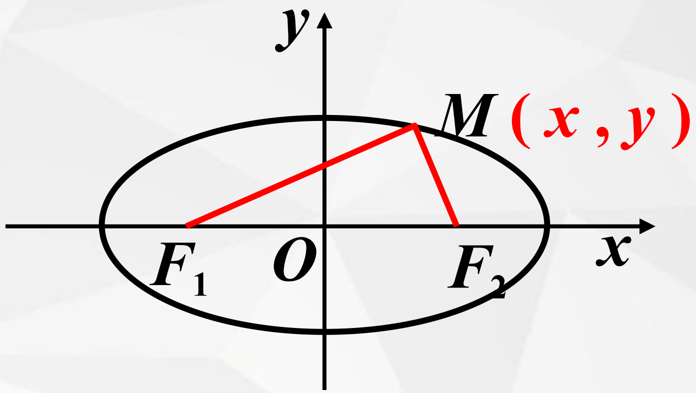


2.椭圆的标准方程

焦点在 x 轴：

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)}$$

$F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$

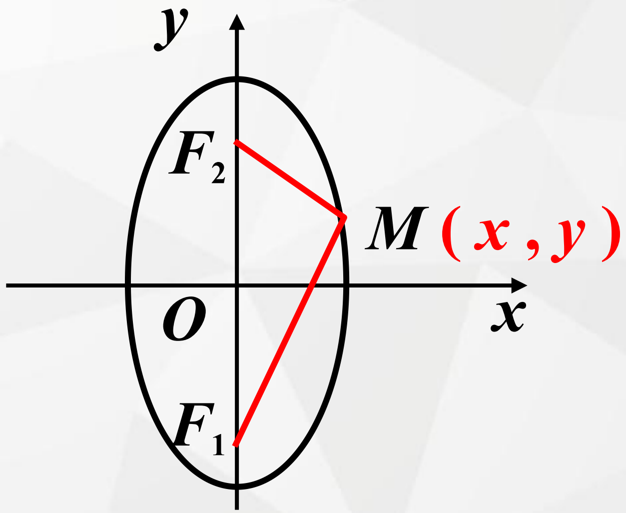


$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

焦点在 y 轴：

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)}$$

$F_1(0,-c)$， $F_2(0,c)$



$$\sqrt{(y+c)^2+x^2}+\sqrt{(y-c)^2+x^2}=2a$$

温馨提示

椭圆的标准方程的认识：

(1)椭圆标准方程的形式：左边是两个分式的平方和，右边是1；

(2)椭圆的标准方程中，x^2与y^2的分母哪一个大，则焦点在哪一个轴上，即“椭圆的焦点看分母，谁大在谁上”；

(3)椭圆的标准方程中三个参数a,b,c满足$a^2=b^2+c^2$;

(4)由椭圆的标准方程可以求出三个参数a,b,c的值.

练习巩固，知识运用

例1 根据条件,求椭圆的标准方程.

（1）焦点在 x 轴上,焦距为 6,椭圆上的点到两个焦点的距离之和为 10;

解 （1）由于 $2c=6,2a=10$,故 $c=3,a=5$,从而 $b^2=a^2-c^2=16$.

因为椭圆的焦点在 x 轴上,所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

例1求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(2)$a=4,b=1$；

$\frac{x^2}{16}+y^2=1$ $\frac{y^2}{16}+x^2=1$

(3)$a=4,c=\sqrt{15}$，焦点在y轴上.

$\frac{y^2}{16}+x^2=1$

1. 根据条件,求椭圆的标准方程.

（1）$a=4$，$b=1$，焦点在 x 轴上；

（2）$b=\sqrt{10}$，$c=5$，焦点在 y 轴上.

2 已知椭圆的焦距为8, 椭圆上的点到两个焦点的距离之和为10 求椭圆的标准方程

练习巩固，知识运用

例2 已知一个运油车上的贮油罐横截面的外轮廓线是一个椭圆，它的焦距为2.4m，外轮廓线上的点到两个焦点距离的和为3m，求这个椭圆的标准方程。

课堂反思，师生评价

1.椭圆的定义；$|PF_1|+|PF_2|=2a,(a>c>0)$

2.椭圆的标准方程

当焦点在x轴上时 $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)}$

当焦点在y轴上时 $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)}$

$$a^2=b^2+c^2$$

3.求椭圆标准方程的步骤

（1）“**定位**”即确定椭圆的焦点在哪条坐标轴上;

（2）“**定量**”即求a, b的值;

（3）求椭圆标准方程的常用方法之一：**定义法**

课堂反思，师生评价

记忆口诀：

一动二定求和常；

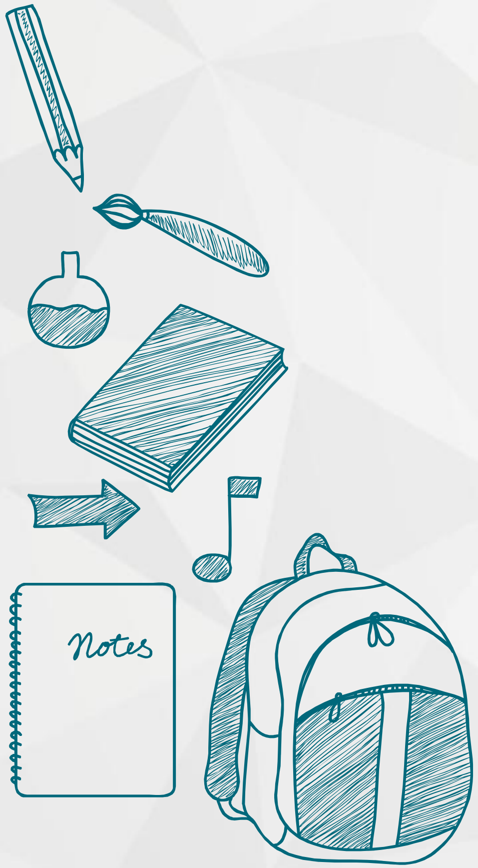
两个方程大对焦；

三个字母勾股弦；

四个想法留心间：

求美，求简，定义，数形结合。

布置作业，课后延伸



1.书面作业：完成课后习题和《数学学案》；

2.查漏补缺：根据个人情况对课堂学习复习与回顾;

3.拓展作业：(1)借助网络了解椭圆的起源与发展；了解丹德林圆锥;

(2)为什么油罐车的储油箱、洒水车的储水箱一般都设计为椭圆形状。