

诱导公式(一)

导语

在前面的学习中，我们知道终边相同的角的同一三角函数值相等，即公式一，并且利用公式一可以把求绝对值较大的三角函数值转化为求 $0^\circ \sim 360^\circ$ 角的三角函数值，对于 $90^\circ \sim 360^\circ$ 角的三角函数值，我们能否进一步把它们转化到锐角范围内来求解，这是我们今天要学习的内容.

一、诱导公式二~四

二、给角求值

三、给值(式)求值

四、利用公式进行化简

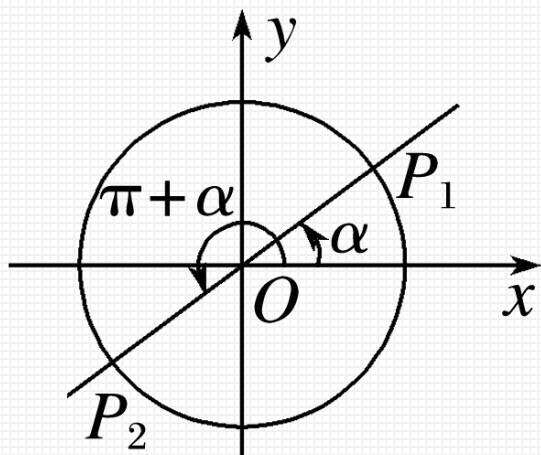
—

诱导公式二 ~ 四

问题1 请同学们写出公式一.

提示 $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$, $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$.

问题2 观察下图，思考我们是如何定义三角函数的？



提示 三角函数的定义核心是角的终边与单位圆的交点的坐标，终边相同的角的三角函数值相等.由图象可知，点 P_1 与 P_2 关于原点对称，点 P_1 与 P_2 两点的横坐标、纵坐标分别互为相反数，以 OP_2 为终边的角 β 可以表示成 $\beta = (\pi + \alpha) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

问题3 知道了终边与单位圆的交点坐标，你能根据三角函数的定义探究角 α 与角 $\pi+\alpha$ 的三角函数值之间的关系吗？

提示 设 $P_1(x, y)$ ，则 $P_2(-x, -y)$ ，根据三角函数的定义可知， $y=\sin \alpha$ ， $x=\cos \alpha$ ， $\frac{y}{x}=\tan \alpha(x \neq 0)$ ， $\sin(\pi+\alpha)=-y$ ， $\cos(\pi+\alpha)=-x$ ， $\tan(\pi+\alpha)=\frac{y}{x}$.
显然，我们可以根据相同的方法找出点 P_1 关于 x 轴和 y 轴的对称点，大家试一试吧.

知识梳理

1. 公式二

$$\sin(\pi + \alpha) = \underline{-\sin \alpha},$$

$$\cos(\pi + \alpha) = \underline{-\cos \alpha},$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \underline{\tan \alpha}.$$

2. 公式三

$$\sin(-\alpha) = \underline{-\sin \alpha},$$

$$\cos(-\alpha) = \underline{\cos \alpha},$$

$$\tan(-\alpha) = \underline{-\tan \alpha}.$$

知识梳理

3. 公式四

$$\sin(\pi - \alpha) = \underline{\sin \alpha},$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \underline{-\cos \alpha},$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \underline{-\tan \alpha}.$$

注意点:

(1) 函数名称不变.

(2) 运用公式时把 α “看成”锐角.

(3) 诱导公式中角 α 可以是任意角, 要注意正切函数中要求 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.



给角求值

例1 利用公式求下列三角函数值：

(1) $\cos(-480^\circ) + \sin 210^\circ$;

解

$$\text{原式} = \cos 480^\circ + \sin(180^\circ + 30^\circ)$$

$$= \cos(360^\circ + 120^\circ) - \sin 30^\circ$$

$$= \cos 120^\circ - \frac{1}{2}$$

$$= \cos(180^\circ - 60^\circ) - \frac{1}{2}$$

$$= -\cos 60^\circ - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

$$(2)\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{23\pi}{6}\cdot\tan\frac{37\pi}{6}.$$

解

$$\text{原式}=\sin\left(-4\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\frac{\pi}{6}$$

$$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}$$

$$=-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

反思感悟

利用诱导公式求任意角的三角函数值的步骤

- (1) “负化正”——用公式一或三来转化.
- (2) “大化小”——用公式一将角化为0到 2π 间的角.
- (3) “小化锐”——用公式二或四将大于 $\frac{\pi}{2}$ 的角转化为锐角.
- (4) “锐求值”——得到锐角三角函数后求值.

跟踪训练 1 $\sin \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{4} - \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \underline{0}.$

解析

$$\text{原式} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0.$$



给值(式)求值

例 2 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解析

$$\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

延伸探究

1. 若本例中的条件不变, 求 $\cos\left(\alpha - \frac{13\pi}{6}\right)$ 的值.

解

$$\cos\left(\alpha - \frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{6} - \alpha\right)$$

$$= \cos\left[2\pi + \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2.若本例中的条件不变, 求 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

解

$$\text{因为 } \cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

反思感悟

解决条件求值问题的策略

- (1)解决条件求值问题，首先要仔细观察条件与所求式之间的角、函数名称及有关运算之间的差异及联系.
- (2)可以将已知式进行变形向所求式转化，或将所求式进行变形向已知式转化.

跟踪训练 2 (1) 已知 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$, 且 α 是第四象限角, 则 $\cos(\alpha - 2\pi)$ 的值是

A. $-\frac{3}{5}$

 B. $\frac{3}{5}$

C. $\pm\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

解析

由 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$, 得 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$,

因为 $\cos(\alpha - 2\pi) = \cos \alpha$, 且 α 是第四象限角,

所以 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5}$.

(2) 已知 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}$, 且 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) = \underline{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

解析

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) = \cos\left[\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \pi\right] = -\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\because \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \theta - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > 0,$$

$$\text{即 } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

四

利用公式进行化简

例 3 化简: (1) $\frac{\cos(-\alpha) \cdot \tan(7\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)}$;

解

$$\text{原式} = \frac{\cos \alpha \cdot \tan(\pi + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot \tan \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

$$(2) \frac{\sin(1\,440^\circ + \alpha) \cdot \cos(\alpha - 1\,080^\circ)}{\cos(-180^\circ - \alpha) \cdot \sin(-\alpha - 180^\circ)}.$$

解

$$\text{原式} = \frac{\sin(4 \times 360^\circ + \alpha) \cdot \cos(\alpha - 3 \times 360^\circ)}{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot [-\sin(180^\circ + \alpha)]} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{-\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = -1.$$

反思感悟

三角函数式化简的常用方法

- (1)利用诱导公式，将任意角的三角函数转化为锐角三角函数.
- (2)切化弦：一般需将表达式中的正切函数转化为正弦、余弦函数.
- (3)注意“1”的代换： $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \tan^2 \frac{\pi}{4} + 1$.

跟踪训练 3 若 $\tan(5\pi + \alpha) = m$, 则 $\frac{\sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin(-\alpha) - \cos(\pi + \alpha)}$ 的值为

 A. $\frac{m+1}{m-1}$

B. $\frac{m-1}{m+1}$

C. -1

D. 1

解析

因为 $\tan(5\pi + \alpha) = \tan \alpha = m$,

$$\begin{aligned}\text{所以原式} &= \frac{\sin(\pi + \alpha) - \cos \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} \\ &= \frac{m+1}{m-1}.\end{aligned}$$

课堂小结

1.知识清单:

(1)诱导公式二~四.

(2)给角求值, 给值(式)求值.

2.方法归纳: 数形结合、公式法.

3.常见误区: 符号的确定.