三角函数的概念

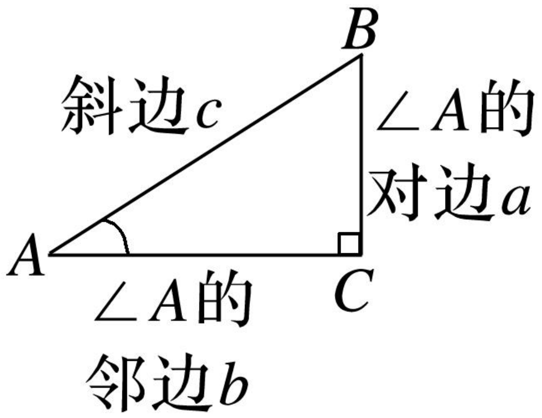
初中我们已经学习过锐角三角函数，我们是如何定义锐角三角函数的？

在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别是a，b，c，则

正弦：$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}a}{\text{斜边}c}$

余弦：$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}b}{\text{斜边}c}$

正切：$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}a}{\angle A\text{的邻边}b}$



锐角A的正弦、余弦和正切叫做$\angle A$的三角函数.

一、三角函数的概念

二、正弦、余弦、正切函数值在各个象限内的符号

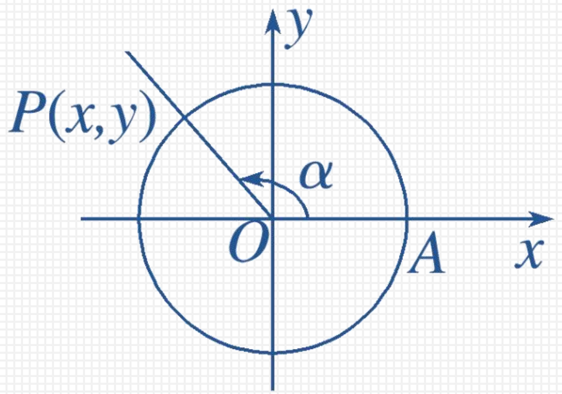
三、公式一

一

三角函数的概念

问题1　我们先研究单位圆⊙O上的点P，以A为起点按逆时针方向旋转，建立一个数学模型，刻画点P的位置变化情况.根据研究函数的经验，我们需要借助什么样的数学工具呢？又该如何设计呢？

提示　我们利用直角坐标系来研究这个问题. 如图，以单位圆的圆心O为原点，以射线OA为x轴的非负半轴，建立直角坐标系，点A的坐标为(1,0)，点P的坐标为(x，y).射线OA从x轴的非负半轴开始，绕点O按逆时针方向旋转角α，终止位置为OP.



问题 2　当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$时，点 P 的坐标是什么？当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$或$\frac{2\pi}{3}$时，点 P 的坐标又是什么？它们是唯一确定的吗？

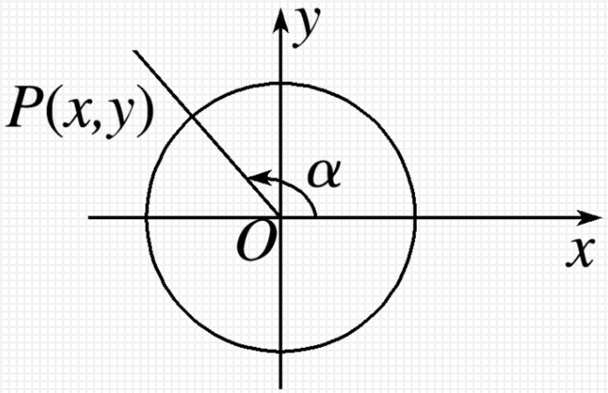
提示　当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$时，点 P 的坐标是$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$或$\frac{2\pi}{3}$时，点 P 的坐标分别是$(0,1)$和$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，它们都是唯一确定的.

问题3　一般地，任意给定一个角$\alpha\in\mathbf{R}$，它的终边OP与单位圆交点P的坐标是唯一确定的吗？

提示　对于交点P的坐标，无论是横坐标x还是纵坐标y，都是唯一确定的.所以点P的横坐标x和纵坐标y都是角α的函数.

知识梳理

任意角的三角函数的定义

条件	如图，设α是一个任意角，$\alpha\in\mathbf{R}$，它的终边OP与单位圆相交于点$P(x，y)$	

知识梳理

<table>
<tr><td rowspan="3">定义</td><td>正弦</td><td>把点P的<u>纵坐标y</u>叫做α的正弦函数，记作$\sin\alpha$，即$y=$<u>$\sin\alpha$</u></td></tr>
<tr><td>余弦</td><td>把点P的<u>横坐标x</u>叫做α的余弦函数，记作$\cos\alpha$，即$x=$<u>$\cos\alpha$</u></td></tr>
<tr><td>正切</td><td>把点P的纵坐标与横坐标的比值$\frac{y}{x}$叫做α的正切，记作$\tan\alpha$，即$\frac{y}{x}=$<u>$\tan\alpha(x\neq 0)$</u></td></tr>
</table>

知识梳理

定义	三角函数	将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数，通常将它们记为： 正弦函数$y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 余弦函数$y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 正切函数$y=\tan x$， $x\in\left\{x\middle\|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right\}$

知识梳理

注意点：

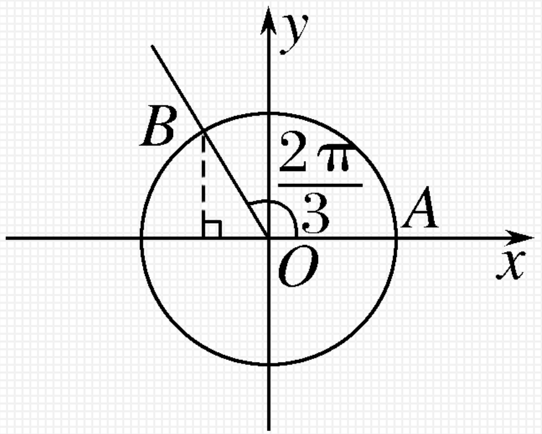
(1)三角函数值是比值，是一个实数.

(2)三角函数值的大小只与角的大小有关.

例 1 (1)求$\frac{2\pi}{3}$的正弦、余弦和正切值.

解

在直角坐标系中，作$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$(如图).



易知$\angle AOB$的终边与单位圆的交点坐标为$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，$\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

(2)若角α的终边经过点$P(-3a,4a)(a\neq 0)$，求$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值.

解

因为 $r=\sqrt{(-3a)^2+(4a)^2}=5|a|$，

①若$a>0$，则$r=5a$，角α是第二象限角，

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3a}{5a}=-\frac{3}{5}$，

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=1$.

②若$a<0$，则$r=-5a$，角α是第四象限角，

$\sin\alpha=\frac{4a}{-5a}=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{-3a}{-5a}=\frac{3}{5}$，

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}=-1$.

利用三角函数的定义求一个角的三角函数值有以下几种情况

(1)若已知角，则只需确定出该角的终边与单位圆的交点坐标，即可求出各三角函数值.

(2)若已知角 α 终边上一点 $P(x，y)(x\neq 0)$是单位圆上一点，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(3)若已知角 α 终边上一点 $P(x,y)(x\neq 0)$不是单位圆上一点,则先求 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，再求 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(4)若已知角α终边上的点的坐标含参数，则需进行分类讨论.

跟踪训练 1　(多选)若角 α 的终边经过点 $P(x，-3)$且 $\sin\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，则 x 的值为

A. $-\sqrt{3}$　　√B. -1　　√C. 1　　D. $\sqrt{3}$

解析

$|OP|=\sqrt{x^2+9}$,

$\because \sin\alpha=\frac{-3}{|OP|}=\frac{-3}{\sqrt{x^2+9}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

解得$x^2=1$，$\therefore x=\pm1$.

返回

二

正弦、余弦、正切函数值在各个象限内的符号

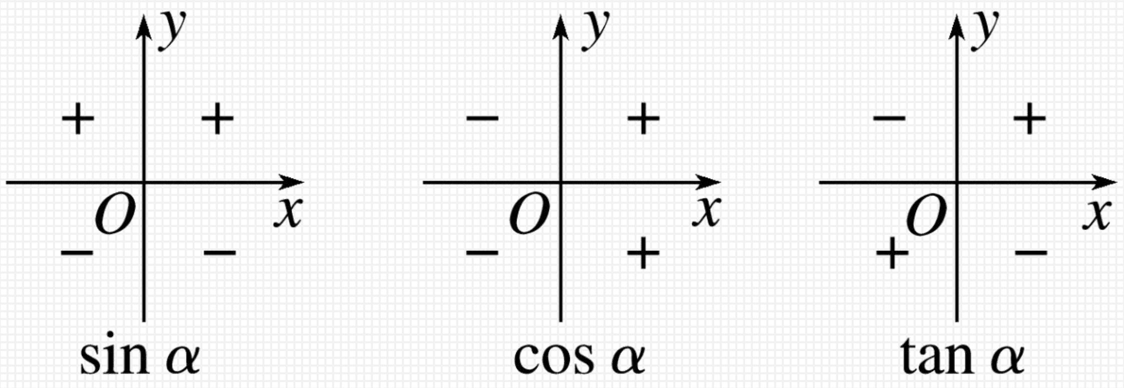
问题4　根据三角函数的定义，大家猜测一下三角函数值在各个象限内的符号.

提示　三角函数值的符号是根据三角函数的定义和各象限内的坐标符号导出的.根据三角函数的定义可知$\left(\sin\alpha=y，\cos\alpha=x，\tan\alpha=\dfrac{y}{x}\right)$，正弦的符号取决于纵坐标$y$的符号，余弦的符号取决于横坐标$x$的符号，正切的符号是由纵坐标$y$和横坐标$x$的符号共同决定的，同号为正，异号为负.

知识梳理

正弦、余弦、正切函数值在各象限内的符号

(1)图示：



(2)口诀：一全正，二正弦，三正切，四余弦.

例 2　(1)若 $\sin\alpha\tan\alpha<0$，且$\dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}<0$，则角 α 是

A.第一象限角　　B.第二象限角

√C.第三象限角　　D.第四象限角

解析

由$\sin\alpha\tan\alpha<0$可知$\sin\alpha$，$\tan\alpha$异号，从而α是第二或第三象限角.

由$\dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}<0$ 可知 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 异号，从而 α 是第三或第四象限角.

综上可知，α是第三象限角.

(2)(多选)下列选项中，符号为负的是

√A.$\sin(-100°)$　　√B.$\cos(-220°)$　　C.$\tan 10$　　√D.$\cos \pi$

解析

$-100°$ 是第三象限角，故$\sin(-100°)<0$；$-220°$ 是第二象限角，故$\cos(-220°)<0$；

$10\in\left(3\pi,\dfrac{7\pi}{2}\right)$，是第三象限角，故 $\tan 10>0$；$\cos \pi=-1<0$.

判断三角函数值符号的两个步骤

(1)定象限：确定角α所在的象限.

(2)定符号：利用三角函数值的符号规律，即“一全正，二正弦，三正切，四余弦”来判断.

跟踪训练2 已知点$P(\sin\alpha，\cos\alpha)$在第三象限，则角α的终边在

A.第一象限　　B.第二象限

√C.第三象限　　D.第四象限

解析

$\because$ 点$P(\sin\alpha，\cos\alpha)$在第三象限，

$\therefore \begin{cases} \sin\alpha<0, \\ \cos\alpha<0, \end{cases}$ $\therefore \alpha$ 为第三象限角.

返回

公式一

问题5　终边相同的角的三角函数值有何关系？

提示　由三角函数的定义，可以知道，终边相同的角的同一三角函数的值相等.

知识梳理

终边相同的角的同一三角函数的值<u>相等</u>.

即

$\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=$ <u>$\sin\alpha$</u>，

$\cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=$ <u>$\cos\alpha$</u>，

$\tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=$ <u>$\tan\alpha$</u>，

其中$k\in\mathbf{Z}$.

例3 计算下列各式的值：

(1)$\sin(-1\,395°)\cos 1\,110°+\cos(-1\,020°)\sin 750°$；

解

原式$=\sin(-4\times360°+45°)\cos(3\times360°+30°)+\cos(-3\times360°+60°)\sin(2\times360°+30°)$

$=\sin 45°\cos 30°+\cos 60°\sin 30°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+\sqrt{6}}{4}$.

(2)$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\cos\frac{12\pi}{5}\tan 4\pi$.

解

原式$=\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{5}\right)\tan(4\pi+0)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{5}\times 0=\frac{1}{2}$.

利用诱导公式一进行化简求值的步骤

(1)定形：将已知的任意角写成$\alpha+2k\pi(k\in \mathbf{Z})$的形式，其中$\alpha\in[0,2\pi)$.

(2)转化：根据诱导公式一，转化为求角α的某个三角函数值.

(3)求值：若角为特殊角，可直接求出该角的三角函数值.

跟踪训练3 计算下列各式的值：

(1)$\tan 405° - \sin 450° + \cos 750°$；

解

原式$=\tan(360°+45°)-\sin(360°+90°)+\cos(2\times 360°+30°)$

$=\tan 45°-\sin 90°+\cos 30°$

$=1-1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\sin\dfrac{25\pi}{3}+\tan\left(-\dfrac{15\pi}{4}\right)$.

解

原式 $=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+8\pi\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-4\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$.

课堂小结

1.知识清单：

(1)三角函数的定义及求法.

(2)三角函数值在各象限内的符号.

(3)诱导公式一.

2.方法归纳：由特殊到一般、转化与化归、分类讨论.

3.常见误区：三角函数值的大小只与角的大小有关，与终边上的点无关；正切函数的定义域为$\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.