

数学基础知识及其教学的再认识

人民教育出版社中数室 章建跃

数学教学中大力加强基础知识的教学,使学生切实打好发展的基础,具有根本的重要性.本文以中学数学基础知识内涵的界定及其理论依据为基础,讨论基础知识的理解、内容确定和安排,以及基础知识的教学等问题.

1 内涵界定和理论依据

(1) 中学数学基础知识的界定

中学数学基础知识是指代数、几何、统计与概率、微积分初步等中的概念、法则、性质、公式、定理、公理,以及由其内容所反映的数学思想和方法.

这一界定有着坚实的哲学、心理学基础.

(2) 明确知识与默会知识

英籍匈牙利哲学家波兰尼于上世纪50年代提出的知识分类指出,明确知识是指能言传的、可以用语言文字符号(包括数学公式、图表)表达的知识.默会知识是只能意会而不能言传的知识.默会知识有着明显区别于明确知识的特征:第一,默会知识镶嵌于实践活动之中,具有情境性和个性化,常常是不可言传的;第二,默会知识很难以正规形式加以传递;第三,默会知识是不能被批判性反思的.只有借助于默会知识的力量,明确知识才能得以发生和发展,人类的知识创新才有根基.默会知识深深地镶嵌于人类的实践活动之中,只有通过活动,并在活动中获得体验,才能达到学会和提高的目的.

(3) 陈述性知识与程序性知识

上世纪70年代以来,现代认知心理学派对知识的本质及其习得机制进行了深入探讨,并取得了实质性进展.目前,认知心理学家普遍认同将知识分为陈述性知识和程序性知识.陈述性知识是关于事物及其关系的知识,包括事实、规则、事件等,用于回答“是什么”的问题.如“ $a+b=b+a$ ”“三角形的内角和等于一个平角”“两直线平行,内错角相等”等.这类知识与我们传统上讲的知识概念(即狭义的知识)大致相当,是

相对静止的知识.程序性知识被定义为:个人无法有意识地提取,因而其存在只能借助于某种作业形式间接推测,它是关于完成某项任务的行为或操作步骤的知识,是用于回答“怎么办”的问题.例如,用函数概念解决问题、几何证明等,都需要程序性知识.程序性知识被区分为一般领域的程序性知识和特殊领域的程序性知识;特殊领域的程序性知识又被进一步划分为特殊领域的自动化基本技能和策略性知识.所谓“自动化的基本技能”是那些可以“熟能生巧”的程序性知识,例如,数学中的运算、推理、作图等;策略性知识是一种关于如何学习、如何思维的知识,是关于如何用陈述性知识和程序性知识来学习、记忆和解决问题的一般方法,这种程序性知识是受使用者的意识控制的,因而被称为“有控制的程序性知识”.

程序性知识与陈述性知识的主要区别在于:第一,陈述性知识是关于“是什么”的知识,程序性知识是关于“怎么做”的知识;第二,陈述性知识是相对静止的知识,其运用形式往往是输入信息的再现,程序性知识是体现在动态的操作过程中的知识,其运用往往要对信息进行变形和运算,结果往往得出不同于输入刺激的信息;第三,陈述性知识的提取和建构是一个有意识的、主动的激活有关命题的过程,速度较慢,程序性知识一旦熟练,则可以自动执行,速度较快.

上述两个角度的知识划分存在很大的一致性.陈述性知识也就是明确知识,是个体能够意识到并能用语言表达的;程序性知识中有些是个体完全不能意识和用语言表达的,也就是默会知识.

(4) 数学知识的分类

从上述理论出发,可以对数学“双基”作如下分类:数学的概念、性质、法则、公式、公理、定理等;由内容所反映的数学思想方法;按照一定程序与步骤进行运算、处理数据、推理、作图、绘制图表等数学技能.其中,数学概念、性质、法则、公式、公理、定理等对应于陈述性知识(或明确知识);数学思想方法和数学技能对应于程序性知识(或



默会知识),其中数学技能对应于数学领域的自动化基本技能,数学思想方法对应于策略性知识。

当然,上述关于数学知识的分类是相对的.对数学知识进行分类,其意义在于帮助人们更加深入地认识数学知识的本质,从而建立起掌握知识的标准,并以此为依据提出数学学习的策略.实际上,数学概念、原理与数学思想方法是融为一体的,它们就像人的躯体与灵魂的关系一样,也像计算机的硬件和软件的关系一样:数学的概念、性质、法则、公式、公理、定理等是数学知识系统的“硬件”;数学思想方法以及运算、处理数据、推理、作图、制表等“操作手段”,是数学知识系统的“软件”.显然,只有“硬件”和“软件”组成一个有机的整体,相互协调,计算机才能正常、有效地运转。

2 全面理解基础知识

2.1 基础知识的“基础性”

数学基础知识是指数学学科的初步知识,而不是指数学学科的逻辑基础.它是当代社会公民适应日常生活所需要的,也是进一步学习各门数学理论课程、学习其他学科(特别是理科)以及参加生产劳动所必备的,是数学中最初步和最基本的知识.特别是在初中阶段,要强调基础知识是“每一个公民适应日常生活所需要的,体现义务教育的要求,因此其面要适当宽些,理论要求适当低些,知识要更加实用些。”

基于这种理解,中学数学基础知识绝大多数都是在初等数学的不同分支中,属于日常生活、生产实践以及进一步学习所必需的.例如,集合与逻辑初步、实数及其运算、字母代数及代数式的恒等变形、方程和不等式、基本初等函数、算法的初步知识、平面几何的基本知识、立体几何的基本知识、解析几何的基本知识、统计与概率的初步知识、微积分的基本概念和基本思想等。

2.2 基础知识包括数学思想和方法

把数学思想和方法纳入基础知识范畴,作为基础知识的重要组成部分,这是体现基础教育“基础性”的重要表现.明确这一点对教学有很大的指导意义.在数学教学中,有些教师往往只着眼于具体法则、性质、公式、定理、公理的教学,而忽视其中所反映的数学思想和方法,其实质是没有揭示知识的精神实质,没有让学生掌握知识的精髓,因而对学生素质的提高非常不利。

数学思想和方法具有层次性.一般的,可以分为如下几个层次:第一层次,与某些特殊问题联系在一起的方法,可将它称为“解题术”;第二层次是解决一类问题时采用的共同方法,可称为“解题方法”;第三

层次是数学思想,这是人类对数学及其对象,对数学概念、命题、法则、原理以及数学方法的本质性认识.常用的数学思想有:分类思想,化归思想,函数思想,数形结合思想,极限思想,统计思想等;第四层次是数学观念,这是数学思想方法的最高境界,是一种认识数学规律的哲学思想。

2.3 基础知识的相对性

需要用发展的眼光审视中学数学基础知识问题.主要应考虑如下几个方面。

第一,发展性.随着社会发展和科技进步,特别是信息技术的飞速发展,数学有了越来越广的用武之地,而且应用的内容也在发生很大的变化.因此,中学数学基础知识的内容也要随之变化、发展.原有的基础知识,有的需要淘汰,有的需要更新;同时还需要增加某些内容作为基础知识.例如,20世纪50年代初期,“算术”是中学数学的基础知识,“解析几何”则不是.后来“算术”不再作为中学数学内容,“解析几何”则作为重要的基础知识被纳入中学数学课程.再如,各种数学用表、计算工具(如计算尺)的使用本来也在基础知识的范围内,但随着信息技术的发展,计算机可以方便快捷地完成各种运算,因而关于如何使用这些工具的知识也不再作为中学数学内容.有些知识,如集合、向量、微积分、统计、概率、算法等,因为在信息时代有着广泛应用,因而其中的基础性内容都被逐渐地纳入了中学数学课程.总之,基础知识的内容及其广度、深度都在发展和变化之中,这是数学课程发展的规律.当然,具体内容的增、减和讲法,可以有不同观点,并且要有不同观点的争论,这样才能使中学数学课程建设处于良性循环的状态.如果没有不同观点的争论,不经过符合教育实验规范的改革试验,那么删减的内容会被老师“捡”回来,新增的内容也会因为教师的抵触而被抛弃。

值得指出的是,不论社会如何发展,科技如何进步,基础知识的内容如何变迁,传统的中学数学主干内容仍然是基础.数学教改的一条重要经验是要处理好“传统”与“现代”的关系.有些“传统”内容,虽然非常“古老”且有一定的学习难度,但却是一切后续学习的基石,也是发展学生数学能力不可替代的载体,这样的内容就不能舍弃.例如,平面几何内容在培养学生的几何直观能力、逻辑推理能力中有不可替代的作用,因此应当作为中学数学课程的核心内容.同时,有些“现代”内容,尽管非常重要而必须进入中小学数学课程,但必须特别注意要与学生思维发展水平相适应,对什么时候进入要做谨慎的安排.例如,统计与概率内容,由于统计思维与确定性思维有很大差异,并

且依赖于辩证思维的发展,而思维发展心理学的研究表明,辩证思维从八年级(14岁)开始萌芽,因此统计与概率的内容过早进入(如在小学阶段)会与学生思维发展水平产生矛盾。

第二,差异性.学生的发展具有个体差异性;我国人口众多、幅员辽阔,不同地区的经济和文化发展水平很不平衡,学校的师资、生源、办学条件等也有很大差异,这种差异性决定了对不同地区、不同学生应当有基础知识的不同要求.全国“一个大纲一套教材”,或“一个标准几套教材”的做法,实践证明效果不佳.解决的办法,一是规定一个所有学生都学的基本要求,但要“上不封顶”;二是采用“一纲多本”或“多纲多本”,编写不同要求、不同风格的教材,供不同地区的不同类型学校选用;三是增加选修课,也可以编写地方教材.总之,作为数学课程中的基础知识,要体现差异性。

第三,关键性.同是基础知识,但其地位并不平等.有些基础知识处于核心的、关键性的地位.例如,代数中的有理数及其运算,运算律和指数律;平面几何中三角形的性质和度量(如三角形内角和、三角形全等、等腰三角形性质、三角形面积公式、勾股定理和相似三角形等);解析几何中的曲线与方程(坐标法思想,数形结合与转化);函数概念,微积分中的极限思想、导数概念;向量及其运算和运算律;等.另外,对于局部内容,也有重点、难点的区别.因此,在基础知识的处理上,要有主次轻重。

基础知识的关键性还表现在内容及其思想方法的转折上.关于中学数学的四个转折(算术到代数、实验几何到论证几何、定性几何到定量几何、常量数学到变量数学),读者可参阅相关文献^[1]。

3 基础知识的内容

中学数学内容应当是那些在现代社会生活、生产和科学技术中有广泛应用的,每一个公民必须掌握的,为进一步学习所必需的,在理论、方法和思想上是最基本的,同时又是学生所能接受的知识.内容的确定主要应为实现教学目的服务.具体要考虑两个方面,一是适应社会需要,二是符合学生接受水平和发展需要。

从社会需要看,传统的中学数学内容,大多数都是现代社会所必需的,应当予以保留.一些复杂的计算、作图和论证、常用对数表、三角函数表等应当删除;一些有广泛应用的知识,如统计、向量、微积分、算法等,应适当增加.随着社会发展、九年义务教育的实现和高中教育的普及,在内容确定和要求上也要有些

变化,主要措施是“低起点,不封顶”,在理论要求和习题难度上增加弹性,加强与生活、生产实际的联系,加强应用.总之,作为基础教育的数学课程,其内容是随社会、数学和其他科学技术以及学生认识能力的发展而更新的.在内容更新中,起决定性作用的是社会、经济发展对数学的需求程度。

如果只从需要考虑,必然出现内容的“增多删少”.所以,更新知识时,还要重点考虑学生负担问题.各国数学教改对减轻负担提出的各种方案,归纳起来有两点:一是精选最普遍适用的基础知识作为必学内容,同时提供选学内容,供学有余力的学生选择;二是加强能力的培养,特别是自学能力和分析、解决问题的能力。

从符合学生接受水平和发展需要考虑,教学内容的分量和难度,即深度和广度,都不能超越学生的认知发展水平.不过,由于学生发展的个性差异,使得教学内容的确定变得非常困难.全国在一个“大纲”或“标准”下,通过班级授课,必然出现“吃不饱”和“吃不了”并存的现象.解决的办法之一是国家只规定绝大多数学生经过努力能够接受的内容作为基本要求,学有余力的学生可以通过选修或拓宽、加深等方式,学习更多的内容.不过,在升学考试指挥棒作用强大的情况下,“考什么学什么”,在考试内容上“深挖洞”,搞强化训练,不考的内容就删掉不教,使得体现个性差异的理想很难实现.所以,数学教学中切实落实素质教育思想,以学生的发展为本,积极改进教学方法,努力促进学生数学思维能力的发展,提高学生的认识能力,始终是数学课程改革的关键。

总之,基础内容的确定,一要精选那些现代社会公民所必需的、大多数学生能接受的代数、几何、微积分、统计与概率等的基础知识作为基本要求;二要贯彻统一性和差异性相结合的原则,根据学生的兴趣、特长、师资力量等安排一定的选学内容。

在普及基础教育的背景下,要特别防止降低内容标准的偏差.一段时间以来,“大众数学”被广泛宣传,而且被用来指导数学课改.因为讲平等,让所有人都有机会学数学,因此某些人认为必须降低数学课程的难度.我国当前初中数学课程就出现了降低代数运算和平面几何推理论证要求的局面.随着改革的发展,人们发现为了使数学能被一般大众所接受而简单地降低内容难度,不但导致大众数学水平的整体下降,而且还使数学杰出人才的培养受到极大冲击.显然,数学课程不能以“人人学会”为理念,否则将是没有终点的退却。

(未完待续)