

从零的零次方无意义谈起

概念有四个要素，第一要素就是“意义”（另外的三个是：事例、特征、符号）。作为这个专栏的首篇，为什么不谈“意义”而是谈“无意义”呢？请往下看。

数学上印象最深的“无意义”，可能是小学时的“0做除数”，当时的说法是“零不能做除数”，后来又说成“零做分母无意义”。初中有了“负数开平方无意义”，高中又有了“零的零次方无意义”，等等。数学上许多东西都是人为规定的，为何还有那么多的无意义呢？为什么不给它们“规定”一个意义？

现在来看 0^0 ，如果允许你去规定，你认为该规定它等于多少才算合适呢？

如果注意到这个序列： $4^0=1, 3^0=1, 2^0=1, 1^0=1, \dots$ ，应该规定 $0^0=1$ ；而对于这个序列： $0^4=0, 0^3=0, 0^2=0, 0^1=0, \dots$ ，似乎又该规定 $0^0=0$ 。数学家们还发现了类似的其它序列，按照那些序列呈现出的“规律”性， 0^0 又似乎是另外的数！进一步的研究可以发现，对于任何一个正数，我们都可以找到这样的序列，使得序列的“规律”指向它。如此一来，你认为该规定 0^0 等于谁呢？

所有的“规定”都是人为的，但人不可妄为。数学上在有了必要性和可行性时，才会去进行人为的规定。即数学上的某个东西非常重要，“必须”有意义否则就存在很多困扰，而它本身又没有“现成的”意义，这时数学家就会尝试去规定一个。这个“规定”自然要满足两点，一是解决了存在的困扰，二是不引发新的矛盾。比如，“任何数乘以0都等于0”就是一个人为规定，它解决了乘法运算的很多问题又不引起矛盾。如果你规定“任何数乘以0都等于这个数”，那就引起矛盾，因而不能采纳。

0^0 的意义，需要规定吗？好像是的，在心理上我们总希望自己看到的東西是有意义的。那么，可以规定 0^0 的意义吗？现在还没有找到规定它的方法，也就是：规定它等于任何一个实数都会导致矛盾。如此，只好不做规定。也就是认为 0^0 无意义。你是不是感到很遗憾？没必要，“ 0^0 无意义”就是它的意义。

人类总是在寻找世界（和人生）的意义，也总希望自己感受到的东西、经历过的事件是实在的。如果你突然发现，面前站着的人是“虚幻”的，那个感觉可不美妙。在逻辑上证明某个东西“不可能有意义”，比认定一个东西“有意义”

要困难得多。因此，对数学上“无意义”的东西我们会有深刻的记忆，深刻程度超过众多“有意义”的东西。

我们今天在这里谈“无意义”，希望大家注意以下几点：

第一，“无意义”和“有意义”是相对的，无意义可以发展为有意义，有意义也可能变得无意义。我们经历过诸多，比如：小数减大数无意义（不够减）、7除以3无意义（除不尽）、大于 180° 的角无意义（不存在）等，现在它们都变成了有意义。还有很多的无意义，比如：负面积、负数开平方、负数的对数等，在以后也会变得有意义。每一次把无意义转化为有意义，都是认识上的巨大突破。

第二，某些看似天然“有意义”的概念被质疑，即被怀疑为“无意义”，会促进人们的思考，突破眼界的局限，进入新的认知领域。比如“线断长度”，意义似乎非常清楚，只要是认识数码的人就会利用刻度尺把一个长度量出来，似乎没什么好研究的。而实际上，“尺子量出来”的那个数据是很表象化的东西，知道它“能不能度量”才是深刻的。由此前沿的思想家们考察了曲线的长度、不连续数集的长度、海岸线长度等，发展出了微积分学、勒贝格侧度、分形理论（以后将逐一介绍）等彪炳史册的伟大理论。即便现在，对于空间、时间等基本概念，人类还没有认识清楚，这已经是科学的最前沿了。

概念，是逻辑思维的结果，也是思维过程的凝结，还是继续思维的载体。人类的灵性，就体现在对抽象概念的理解和应用上。这，也是我们开设“概念理解”专栏的意义。我们会把更多的意义揭示出来，以飨读者，也让我们的学习充满意义。