（本文系江苏省教育科学“十三五”规划青年教师专项课题《学习进阶理论下的高中数学概念教学研究》（编号：C-c/2016/02/119）的研究成果；
本文系江苏省中小学教学研究第十三期重点课题《逻辑与运算：指向数学学科素养的实践研究》（编号：2019JK13-ZB12)的阶段性研究成果）

“慢”探究：撬动学生思维进阶的支点
——对 2022 年全国数学新高考卷Ⅱ第 12 题的深度评析

摘　要：基于学习进阶视角，以一道高考试题为学习对象，开展具体有效的“慢”探究活动，从“慢”探究的理论内涵到“慢”探究活动的进阶范式，深度揭示数学育人的新视角，有效促进学生的高阶思维自然拔节。
关键词：“慢”探究　学习进阶　理解　迁移　创新

一、问题提出

当前，在一线数学教学中，依然存在“提问多，启发少；节奏快，思考少；容量大，内涵少；指定多，探究少”等现象，教师片面地追求教学速度与进度，往往“填鸭式”地传授知识，导致学生对知识浅尝辄止，对公式、定理的掌握仅仅停留在记忆与应用的层面上，这样一来，学生的思维力和学习力没有得到提升，有违数学教育的初衷。因此，在数学教学中实施“慢”探究，对助推学生的思维进阶，发展数学核心素养具有重要意义。

二、“慢”探究和学习进阶

“慢”探究，并不是指一味耽误教学进度、降低课堂效率、压缩学习容量的“慢”，而是锚定学生的最近发展区，以期与学生的身心发展同频共振的“慢”。“慢”探究主张给学生充分的思考和体悟的时间，让学生在追溯数学本质、砥砺高阶思维的探究活动中获得浸润式体验。

学习进阶描述了在一定的时间跨度内，学生对某一主题的思考和认识不断丰富、精致和深入的过程。学习进阶不单指学习内容方面的层级进阶与路径的描述，更是学生思维发展、认知水平和关键能力提升的路径。

学习进阶视域下的“慢”探究，应着眼于把握学生的先决知识和认知心理，着力于搭建学生思维爬坡的“脚手架”，着手于提炼学生自我发展数学核心素养

的策略。下文以2022年全国数学新高考卷Ⅱ第12题为例，具体展开论述。

三、基于学习进阶的“慢”探究案例

题目 (多选题)对任意x，y，$x^2+y^2-xy=1$，则(　　)

A. $x+y\le 1$　　B. $x+y\ge -2$

C. $x^2+y^2\le 2$　　D. $x^2+y^2\ge 1$

(2022年全国数学新高考卷Ⅱ第12题)

1.“慢”在进阶起点的多维分析

试题涉及的定理、公式、思想、方法以及学生已有的认知水平和活动经验构成“慢”探究的进阶起点，重点关注知识发展的来龙去脉，需要循序渐进地探究问题的切入方向，逐步形成整体化、结构化、系统化的思维体系。

具体而言，这道题是二元变量问题，题干要求我们在一个约束条件下求二元代数式的范围，学生对于多元变量的最值或范围问题比较亲切，有一定的解题经验；涉及的两个变量x，y在地位上是等同的，此外，x与$-y$在地位上也是等同的，但后者学生往往会忽视；条件式和选项涉及的代数结构包含x，y这两个数的“和”“积”“平方和”，学生能从基本不等式出发得到“和”“积”“平方和”之间的不等关系，也能从完全平方公式出发得到“和”“积”“平方和”之间的等量关系；从代数式的次数看，条件式和选项皆为齐次，条件式可以视为二次方程，可配方，也可用求根公式解方程，这一点是学生的认知盲点，归结于主元意识的缺失；x^2+y^2可以视为点$P(x,y)$到原点的距离的平方，由$x^2+y^2-xy=1$确定的x，y是有界的，该方程在平面直角坐标系中对应的曲线是封闭曲线，学生转化问题的能力比较欠缺，数形结合的意识有待加强，习惯于复杂的代数推理，难以调用形感简化问题；“投机”心理的滋生，喜欢用特殊值验证选项，作为多选题可以尝试，排除选项A轻而易举，但在找特殊值排除选项D时，大多数学生感到很迷茫。

2.“慢”在进阶层级的方法演示

(1)进阶水平一：回溯本源，深度理解

注意到题干中的三个结构x^2+y^2，$x+y$，xy之间有如下不等关系：

$x^2+y^2\ge 2|xy|$，$2(x^2+y^2)\ge (x+y)^2$，$(x+y)^2\ge 4xy$。利用这三个不等关系，我们可以对条件式$x^2+y^2-xy=1$的局部进行放缩，建立关于目标式的不等式。由$x^2+y^2-xy=1$可得$|x^2+y^2-1|=|xy|\le \dfrac{x^2+y^2}{2}$，所以$\dfrac{2}{3}\le x^2+y^2\le 2$；由$x^2+y^2-xy=1$可得$(x+y)^2-1=3xy\le \dfrac{3(x+y)^2}{4}$，所以$-2\le x+y\le 2$。

在上述过程中，基本不等式(或其推论)是直击问题本源的工具，局部放缩是重要的转化手法，构造关于目标的不等式是明确的操作目的。从这三个角度，我们可以将这种解法理解为融合基本不等式法、局部放缩法、构造不等式法为一体的公式转化法，进而形成整体化和结构化处理问题的数学活动经验。

(2)进阶水平二：形成观念，自觉迁移

初中的一元二次方程可以用配方法求解方程的根，高中的圆的一般方程是二元二次方程，也可以通过配方法转化为圆的标准方程来研究其性质。有鉴于此，二次方程可以通过配方法来研究其相关性质应该成为一种可迁移的一般观念，应用于这道高考题，可以作以下处理。

依据题干条件，可以以x为主元进行配方，由$x^2+y^2-xy=1$可得$(x-\dfrac{y}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{3}y}{2})^2=1$，于是我们可以进行三角代换，令$\begin{cases}x-\dfrac{y}{2}=\cos\alpha\\ \dfrac{\sqrt{3}y}{2}=\sin\alpha\end{cases}$，则$\begin{cases}x=\cos\alpha+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha\\ y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\end{cases}$，所以$x+y=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})\in[-2,2]$，

$x^2+y^2=(\cos\alpha+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha)^2+(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha)^2=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{6})\in[\dfrac{2}{3},2]$。

显然，条件式也是二元二次方程，但有别于圆的一般方程，主要是因为多出了xy项，这就给学生迁移经验带来了障碍，不再是简单的同化，而是要强化主元意识，若以x为主元，则可将y视为常数，这样便化归为一元二次方程进行配

方，实现对原有知识结构的顺应，丰富和完善解决问题的一般观念。

针对上述过程中三角换元的应用，可以联想直角坐标方程与极坐标方程的互化经验来解决问题。将 $x^2+y^2-xy=1$ 视为平面直角坐标系中动点 $(x，y)$ 的轨迹方程，令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，将普通方程转化为极坐标方程，即：$\rho^2=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\sin 2\theta}$，

由 $-1\le\sin 2\theta\le 1$，可得 $x^2+y^2=\rho^2\in[\frac{2}{3},2]$，又因为

$(x+y)^2=\rho^2(1+\sin 2\theta)=\dfrac{1+\sin 2\theta}{1-\frac{1}{2}\sin 2\theta}\in[0,4]$，所以 $x+y\in[-2,2]$。

实现直角坐标与极坐标互化的本质在于三角函数的定义，学生在探究活动中揭示数学本质，积累数学活动经验，逐步形成可迁移的方法论。

(3)进阶水平三：拓宽视域，谋求创新

代数推理对学生的逻辑思维和运算能力要求较高，作为高考试题，时间成本和复杂程度成为学生的“拦路虎”。那么，能否从几何层面寻求突破呢？从上面的三角代换过程可以清晰地看到，二次方程 $x^2+y^2-xy=1$ 中的 x，y 都是有界的，考虑变量取值的连续性，可以合理猜测该曲线是一条封闭曲线，进一步猜测它是一个椭圆，我们可以尝试用椭圆的定义来证明这一点。

探究过程：方程中的 x，y 同时用 $-x$，$-y$ 代入，方程不变；x 用 y 代入，y 用 x 代入，方程不变；x 用 $-y$ 代入，y 用 $-x$ 代入，方程不变。由此可见，该曲线关于原点对称，关于直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 对称。对称轴与曲线的四个交点分别为 $(1,1)$，$(-1,-1)$，$(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$，$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$，前两点为长轴端点，后两点为短轴端点。若该曲线为椭圆，则 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$c=\frac{2}{\sqrt{3}}$，两个焦点在直线 $y=x$ 上，坐标分别为 $F_1(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$，$F_2(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$。

证明过程：设 $P(x，y)$ 是曲线 $x^2+y^2-xy=1$ 上一点，易知 $-\sqrt{6}<x+y<\sqrt{6}$，

所以，

$$PF_1+PF_2=\sqrt{(x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2+(y+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2}+\sqrt{(x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2+(y-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(x+y)+\frac{4}{3}}+\sqrt{x^2+y^2-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(x+y)+\frac{4}{3}}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(x+y)+2-\frac{2}{3}(x^2+y^2-xy)}+\sqrt{x^2+y^2-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(x+y)+2-\frac{2}{3}(x^2+y^2-xy)}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(x+y)+2}+\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(x+y)+2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+\frac{x+y}{\sqrt{3}})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\frac{x+y}{\sqrt{3}})^2}$$

$=2\sqrt{2}>F_1F_2$。

显然，条件式所表示的曲线是发生旋转后的椭圆，中心依然为原点，长轴为一、三象限角平分线，短轴为二、四象限角平分线，依据四个顶点可作出椭圆的草图。对于选项，令$t=x+y$，则表示斜率为-1的一组平行线，t的几何意义是与截距相关的量，当直线$y=-x+t$经过长轴顶点时，取得$x+y$的最值；令$u=x^2+y^2$，则u的几何意义是椭圆上的点到原点的距离的平方，依据几何直观，取得最大值对应的点为长轴顶点，最小值对应的点为短轴顶点。探究代数形式背后的几何背景，借助直观想象寻求优化策略，让学生思维的发散性和创造性得以持续发挥。

3.“慢”在进阶策略的适度跟进

“慢交流”通过师生对话、生生对话等使学生经历知识的融汇、碰撞和整合，逐步形成自己的主张，获得对问题的思考和解答。

譬如，教师抛出问题：从公式转化的层面而言，两个数x，y的“和$(x+y)$”“差$(x-y)$”“积(xy)”“平方和(x^2+y^2)”，这四个量中，任选三个都能建立一个等式，一共有$C_4^3=4$个等量关系，大家能不能尝试其他的转化途径呢？

问题抛出后，切记不可直接给出答案，要学会等待，给学生留白，让学生经

历充分的思维砥砺。首先，让学生独立思考，自我对话；然后，安排小组合作探究，互动交流，生生对话；最后，学生代表阐述观点，分享困惑和收获，提炼问题解决的一般思路和方法，教师给与评价和启示，师生对话，同频共振。

学生提供的解决方案：呈现四个等量关系，$(x+y)^2=(x^2+y^2)+2xy$，$(x-y)^2=(x^2+y^2)-2xy$，$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$，$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$。利用这四个等量关系，可以对条件式直接进行变形，得到目标式的范围。由 $x^2+y^2-xy=1$ 得 $\frac{(x+y)^2}{4}+\frac{3(x-y)^2}{4}=1$，所以 $-2\le x+y\le 2$，$-\frac{2}{\sqrt{3}}\le x-y\le\frac{2}{\sqrt{3}}$。由 $x^2+y^2-xy=1$ 得 $x^2+y^2+(x-y)^2=2$，$3(x^2+y^2)-(x+y)^2=2$，所以 $\frac{2}{3}\le x^2+y^2\le 2$。

“慢交流”使学生想得深入，做得细致，说得通透，提高学生多元表征问题的能力及团队协作能力。

四、结语

教育是有序的，是渐进的，是自由的。数学教育需要适度的“慢”才能有效落实育人目标。在片面追求课堂效率的数学教学中，学生被过度牵引，“伪”探究屡见不鲜；学习进阶视域下的“慢”探究为数学教学提供了新的视角。“慢”探究的目的是在“慢组织”、“慢形成”、“慢交流”中让学生的思维脱离舒适区，进入焦虑区，冲刺挑战区，最终发展高阶思维。教师应该积极探索“慢”的时机、“慢”的路径、“慢”的策略，努力实现“慢”中问道、“慢”中见效、“慢”中赋能。

参考文献

[1]刘晟，刘恩山．学习进阶：关注学生认知发展和生活经验[J]．教育学报，2012(2)：81-87.

[2]周军．思维支架：学习进阶撬动深度课堂的着力点[J]．中小学数学：高中版，2018(11)：1-4.

[3]华云锋，段志贵．数学“慢学习”的教育价值与教学策略[J]．数学通报，2021，60(02)：32-35