

孕育思想探究的问题教学

●江苏省宜兴中等专业学校 潘玉清

问题教学的研究随着新课程改革的不断深入也越发显示出其特有的重要地位,广大高中数学教师对问题教学在数学课堂中的应用、思想及理论进行了有意义的整理与分析并注入了新的理念,问题教学在各知识点教学中的具体应用成为了高中数学教师研究的重点,本文结合基本不等式的最值问题对孕育思想探究的问题教学作出了比较详尽的思考.

一、教学过程

1. 问题导入

师:大家对于基本不等式及其简单应用有何感悟和体会呢?接下来我们就该方面内容简单回顾一下.

问题1:求以下函数的最值.

(1)若 $x>0, y>0$,且 $xy=16$,则 $x+y$ 的最小值为_____.

(2)若 $0<x<2a$,则函数 $f(x)=x(2a-x)$ 的最大值为_____.

(3)已知 $x>1$,则函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值为_____.

设计意图:针对性的小练习使学生已经掌握的知识结构得到了唤醒,新的认知中公式变形、适用条件的思考等问题得到了启发.若问题1中第(2)问的函数变成 $f(x)=2ax-x^2$,应该怎样求其最值呢?若问题1中第(3)问的函数变成 $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$,则应该怎样求其最值呢?这是促进学生转化与化归能力有力提升的有效手段.

生1:回答了各小题的答案与过程.

师:很好!大家觉得基本不等式求最值问题需要注意哪些方面的内容呢?

生2:必须同时满足“一正数”、“二定值”、“三相等”这三个条件.

2. 铺设问题情境

师:大家对基本不等式的相关内容已经具备了一定的体会,请看问题2.

问题2:以下命题中哪些是对的呢?

A. $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ B. $x^2+\frac{4}{x^2} \geq 4$

C. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$

D. 若 $x \in (0, 1]$, 函数 $f(x)=x(3-2x) \leq \left(\frac{x+3-2x}{2}\right)^2 = \frac{(x-3)^2}{4}$ 无最大值

设计意图:以错题辨析的形式让学生对四个选项进行辨析,能够很好地帮助学生准确把握所学知识点并建立前后知识的联系,学生的思维能力得到挑战的同时也更好地从感性认识实现了向理性认识的飞跃.

师:请各小组赶紧讨论并分享讨论结果(巡视).

生3:B是对的.

师:其他各选项错在哪里了呢?

生3:选项A忽略了公式中的 $a, b>0$ 这一条件而出错;选项C中等号是取不到的;选项D是因为不满足和为定值,因此应配凑成 $\frac{1}{2} \cdot 2x(3-2x)$,所以 $f(x)=\frac{1}{2} \cdot 2x(3-2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x+3-2x}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$,所以最大值是 $\frac{9}{8}$.

师:大家对基本不等式求最值问题的规律有何感想?尝试总结一下吧.

生3:同时满足上述提及的三个条件以及和为定值时,积会存在最大值,当积为定值时和能取到最小值.

师:非常好!

生4:老师,选项C是错的,那它的最小值我们能求出来吗?

师:这个问题问得好!我们一起来研究.

3. 探究生成

问题3:求函数 $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值.

设计意图:沿着学生思维发展推出的问题3是学生思维深度的延伸,学生在错题辨析中对相关知识形成了更好的理解,思维的批判性也在此过程中得到了很好的锻炼.

生5:函数因其本身的结构问题直接利用基本不等式是不可以的,因此,可以把函数表达式变成 $f(x)=\sqrt{x^2+4}+$

$\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}$ 这就变成了选项C,从生3的分析中我们知道利用基本不等式求解是行不通的.

师:那么,我们应该怎样求解呢?

生5:可以换元,令 $t=\sqrt{x^2+4}$ ($t \in [2, +\infty)$),原函数转化成了 $f(t)=t+\frac{3}{t}$ ($t \in [2, +\infty)$),然后利用函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ ($a>0$)的单调性求得 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{7}{2}$,此时 $t=2$,即 $\sqrt{x^2+4}=2$,解得 $x=0$.

师:很好,大家从上述解法中可有启示?

生6:等号成立的条件是这类题目最为关键的地方,因此,我们可以在改变条件上下功夫以此令等号成立.

师:使其最小值为 $2\sqrt{3}$ 时应怎样改变题中条件呢?

生6:改变根号内的数或改变分子的数字,不管改变哪个都是为了等号成立.

师:太棒了!生6的分析说明他已经触摸到了问题的本质.

4. 问题拓展

问题4:若 $a>4$,求函数 $f(x)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最值.

设计意图:发散思维的训练能使学生解题时候的思路更加开阔,静态中的基本不等式问题对于学生来说比较简单,动态中的基本不等式问题能够更好地帮助学生理解公式的内涵和外延形成深刻的理解,学生思维的发散性与广阔性也在问题本质呈现的同时得到了很好的锻炼.

师:问题4跟之前的三个问题相比有不一样的地方吗?

生7:参数被引入进来了,运用基本不等式来解题的话就必须对等号成立的条件进行分类讨论.

师:怎样讨论呢?其标准又是怎样的?

生7:原式可化为 $f(x)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4+a-4}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{a-4}{\sqrt{x^2+4}}$ ($a>4$),借助生5在问题3中的解题方法对分子的 $a-4$ 进行讨论,等号成立的条件即为讨论的标准.

师:请具体谈一谈.

生7:假设等号能取到,则只需满足 $\sqrt{x^2+4}=\frac{a-4}{\sqrt{x^2+4}}$,也就是 $x^2+4=a-4$,即 $x^2=a-8$ (*),从而当 $a \geq 8$ 时 (*)式有解,即等号取到并求得最小值为 $2\sqrt{a-4}$;当 $4<a<8$ 时,

(*)式无解,等号则无法取到,此时利用基本不等式求解就行不通了,借助函数的单调性才能求得最小值为 $\frac{a}{2}$.

师:很好,抓住了本质.

生8:老师, $a>4$ 会不会太巧了,它恰好能使分子为正,如果 $a \leq 4$ 又该怎样求解呢?

生8的问题问得有点突然,但笔者认为这个问题问得很好并引导学生开始了探索.

生9:可以解决.(1)当 $a=4$ 时,原式为 $f(x)=\sqrt{x^2+4} \geq 2$,最小值为2;(2)当 $a<4$ 时, $f(x)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}-\frac{4-a}{\sqrt{x^2+4}}$,令 $t=\sqrt{x^2+4}$ ($t \in [2, +\infty)$), $f(t)=t-\frac{4-a}{t}$ ($t \in [2, +\infty)$),该函数在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,此时函数 $f(x)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+4}} \geq \frac{a}{2}$,两种情况统一成 $f(x) \geq \frac{a}{2}$.可见去掉 $a>4$

对解题不会造成影响,综上,函数 $f(x)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值可以分为两类 $f(x)_{\min}=\begin{cases} 2\sqrt{a-4} & a \geq 8, \\ \frac{a}{2} & a < 8. \end{cases}$

师:太好了!同学们对题目进行精简的同时还给出了正确的解答,看来大家对此题的探究很有兴趣,那老师就给大家布置一下课外作业,每一组在问题4的基础上各提出一个问题,下堂课我们来讨论哪个小组提出的问题最为经典.

5. 反思归纳

师:本节课在一个问题的讨论中作出了多种讨论、拓展与延伸,大家以为其中所涉及的解法、思想方法等都有哪些呢?

二、教学感悟

1. 贯穿教学过程的问题令学生的自主探究得以实现

笔者精心设计的系列问题成为了本节课教学的主线,教学方向与顺序得以明确,环环相扣、层层递进且贴近学生最近发展区的问题有效地唤醒了学生的记忆,引起了学生的认知冲突,激发了学生的讨论.教师能够根据学生的质疑顺势抛出后续问题,使学生的自主探究与积极参与显现出了更加积极的状态,学生思维活动深层参与的同时也实现了对问题的深刻理解.笔者在整个教学活动中都能围绕所设计的问题串进行核心知识的传授,学生在一系列问题的探究中深层思考并实现了数学知识的“再创造”,以学生为本、处处为学生着想的教学

数学实验教学的探索和思考

●江苏省张家港市沙洲中学 许秋峰

众所周知,数学实验是数学教学的重要实践活动,它可以帮助学生通过亲身操作、感知理解知识的形成过程,进而完善其知识体系的形成.以往数学实验并不受到数学教学的重视,因为数学考查的方式往往是以数学问题的解决为主导,因此知识的理解过程和建构过程往往受到教学的忽视.

随着课程改革的不断深入,仅仅讲求成绩为主的教学理念已经落后于现代教学,从各大学进行的自主招生和三位一体的招生来看,大学对中学生的能力要求愈来愈高,因此对于数学学习的方式和理念也随之改变.原东北师大史宁中教授在课程标准制定中强调,数学教学要注重知识的建构,理解知识的来龙去脉,这样才能让知识获得牢固的扎根,过于考查应试的数学教学时代将要过去.

无独有偶,今年刚刚制定完成的数学新一轮课程标准提及:数学教学不仅传授知识,更要注重学生学科核心素养的培养.这就更要求教学需要加强学生的亲身探索和实践.用弗赖登塔尔的话说:只有再操作才是对知识最好的理解.

一、传统实验的介入

数学实验从广义上来说,能通过任何操作的活动都

是实验的一种形态.从低端来说,课堂教学中最根本的情境引入恰恰是最简单、最质朴的数学实验活动,这样的活动是典型的传统型数学实验;从中等层次活动来说,一般借助其余相关学科的器械进行与数学知识有关的活动,是更进一步的数学实验,体现学科的融合;从高等层次来说,以往的研究性学习是数学实验活动的最高形态,这样的活动有助于学生从单一的知识理解向全面性的知识理解不断过渡.

案例(一)函数法则/的理解

实施背景:这是笔者参观一所程度较弱的学校(农业学校)发现的教师课堂教学情境设计,本情境实验是在一所学生水平程度较低的学校实施的,具有参考性.

设计:考虑到学生程度极弱,因此该教师抛弃了以往对于法则/的数学化阐述,而是以农业学校特有的实验工具进行使用,从情境实验中感受函数法则/的理解.

师:同学们,我把大米倒入加工机(如图1所示),装上磨具口1,现在开动机器,生产出的是什么?

生:面条!

师:好,现在我换上磨具口2,再一次开动机器,生产出的是什么?

生:是面粉!



图1

方针使学生的学习积极性得到了充分的调动,以学习方法为教学重点的教学思想使学生的能力得到了充分的锻炼和提高,学生在潜移默化中逐步获得了知识,并因此学会了解决此类问题的有效方法.

2.引导学生发现问题令学生真正“反客为主”

贴近学生最近发展区的问题情境的铺设使学生内在的认知冲突得到了有力的诱发,学生的好奇心在问题的驱动下变得无比强烈,问题的存在使得学生的探究欲望无形增加,问题这一数学活动的载体将知识的逻辑结构与学生的思维过程紧密而有机地联系起来,知识的逻辑结构因为学生的讨论与探究转化成了学生

的认知结构,学生在探索问题的过程中也深刻领会到了数学知识中所隐含的思想方法,学生成为课堂的主人因此变得真实而有意义.很多优秀学生因为传统课堂教学中教师问、学生答的陈旧模式未能展现出其隐藏的巨大潜能,但本课引导学生提出问题的教学使得学生的智力与思维都得到了有意义的锻炼,变被动为主动的学习形式标志着素质教育又前行了一步,因此,教师在教学中一定要善于引导学生提出问题继而提出有价值的问题,孕育思想探究的问题教学对于学生的发展是更有意义的. **F**