

从做中学，从学中悟

——核心素养在高三数学课堂中的落地生根

宜兴市丁蜀高级中学 周军

1 背景介绍：

长期以来，学生一直是教育关注的焦点，是课堂乃至教育教学中的主体。以生为本的教育理念中提到，比“基本知识和基本技能”更为基础的是发展人的情感和悟性，认为感悟是人的精神生命拓展的主要标志，学生学习的核心部分应该是发展感悟，积累的意义也在于感悟的形成。另外，“以学论教”的教学评价体系也日渐趋于完善，而新一轮的课改仍然倡导促进学生的全面发展，并且突出了“立德树人”的根本任务，而且提出数学学科的六大核心素养。

笔者有幸参加某市名师活动并认真学习了某位名师的高三课堂教学活动，整节课老师主要渗透了三个字——“做、学、悟”，虽然是简单的三个字，但是却涵盖了数学学习的整个过程，老师循循善诱的同时也渗透了育人理念和哲学思想，充分体现了核心素养的落地生根。

2 课堂呈现：

2.1 做——纸上得来终觉浅

问题：已知双曲线 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 ，点 P 在双曲线上，且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，求 ΔF_1PF_2 的面积。（这是教材选修 1-1 上第 40 页的第 9 题原题，同时也是选修 2-1 第 40 页的第 8 题，只是把“ $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ”这个条件改成了“ $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ”。）

师：有想法吗？

生₁：可以使用焦半径确定点 P 的位置，从而求面积。

师：很好，因为是双曲线，需要注意点 P 的位置在哪个分支。

生₂：（举手）也可以设点 P 的坐标，根据两个条件求出坐标（纵坐标）。

师：恩是的，可以构建一个方程组，解方程组。

生₃：（举手）我的方法是画图，设 PF_1 和 PF_2 ，根据勾股定理和双曲线定义解三角形。

师：很好，用到了几何性质。

生₄：对于他（生₃）的解法，我觉得可以不用把 PF_1 和 PF_2 分别求出来，直接整体法求 PF_1 和 PF_2 的乘积就可以。

感想 1：

首先，呈现这样一个问题，老师并没有主张拿到问题就直接开始动笔，而是随机请了两位学生站起来，谈谈看到这个问题后的想法和准备“做”的大致思路，这样的活动就一下子激发了大家思考和讨论的氛围，继第一位、第二位学生讲完后又有其他的学生自己主动要求将自己的想法和大家分享，给出自己对问题的不同层面的理解以及设想。

与其说这是一个问题，倒不如说是一个现象。问题提出后应该直接面对如何分析和解决这个问题，选择合适的方法求出 ΔF_1PF_2 的面积，而现象的呈现则让同学们有更自由的思考空间以及体现更广阔的思考价值。这里，老师很明显将其当做现象来处理，从而引发了同学

之间的有效讨论.

也就是说如果教师直接给出问题,那么分析和解决问题就变成了主要任务,学生也就成为了完成任务的机器,而如果给出的是现象,那么发现问题和提出问题就变成了主要工作,“做”这个字不仅仅是写出解题步骤和结果,而体现的是一个连续的过程,包括面对现象后的观察和感知,结合它的特点描述与自身的基本活动经验,发现它所蕴含的问题和价值,以及提出问题后分析问题和解决问题的过程.通过对这个现象的诠释,再提出的问题,往往才是真正的问题,是我们所要研究的问题.

2.2 学——书山有路勤为径

师:如果把 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 改成 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 呢?

生:很简单,只要使用余弦定理即可,计算得.

师:能不能有更进一步思考?

生:(部分声音)三角形的面积和角 $\angle F_1PF_2$ 有一定的关联?

师:我们一起来探究一下,不妨设 $\angle F_1PF_2 = \theta$

(推导过程省略)

生_众: $S = b^2 \cot \frac{\theta}{2}$.

生₂: 似曾相识,椭圆中也有类似的结论.

生₃: 对,没有记错的话应该是 $S = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$.

师:好,那今天我们主要来研究椭圆中的三角形面积问题.

变题 1: 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 , P 是椭圆上的动点,则 ΔF_1PF_2 的面积的最大值是.

生₁: 根据面积公式 $S = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot |y_p|$, 发现 ΔF_1PF_2 的面积取决于 $|y_p|$ 的大小,显然 P 是椭圆的上、下顶点时,面积最大,即 $S = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot |y_p| \leq \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b = bc = 12$

生₂: 也可以利用结论 $S = b^2 \tan \frac{\theta}{2} = 9 \tan \frac{\theta}{2}$, 根据 $y = \tan x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 的单调性, θ 越大,面积越大,显然 P 是椭圆的上、下顶点时, θ 最大,面积也就最大.

生₃: 可以通过画图,可以直观地发现 P 是上、下顶点时,面积最大.

变题 2: 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 F_1 、 F_2 , 点 P 在椭圆上,若 ΔF_1PF_2 的面积的最大值是 $\frac{1}{2}a^2$, 则椭圆的离心率为.

生₁: 根据变题 1, $S_{\Delta F_1PF_2} \leq bc$, 即 $\frac{1}{2}a^2 = bc$, 易求离心率.

师:若以后已知 ΔF_1PF_2 最大面积是 $\frac{1}{2}b^2$, 或者 $\frac{1}{2}c^2$, 同样也可以求离心率.

生:只要是告诉咱们 ΔF_1PF_2 最大面积是关于 a 、 b 、 c 的表达式,那么就可求出离心率.

感想 2:

在“做”的过程中，学到了什么？在老师的课堂上不难发现，学生有着宽广的思路和自由的发挥，从解题的策略和方法来看，就已经非常的丰富，所以，“从不同的角度看现象，用不同的方法解决问题”是值得学习的，当然这仅仅是表象，之前也说过，并不是用多种方法解决了提出的问题就结束了，还应该注意，如果改变其中的一些条件（包括曲线的方程中的数据、曲线的位置、曲线的形式等），同样可以依葫芦画瓢解决问题，甚至把一些具体数据改成参数字母，就可以得到更一般的结论. 一方面可以作为一个公式直接记忆，如椭圆

中焦点三角形的面积 $S = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$ （其中 b 是短半轴长， θ 是顶角），另一方面也可以把这样的

结论直接使用到具体的问题中，如变题 2 中使用了变题 1 中的 $S_{\Delta F_1 P F_2} \leq bc$ 的结论. 当然还可以基于这些知识点以及思想方法，试着揣摩和推测命题人的思路 and 想法，甚至也可以自主进行拓展，如思考“已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 ，在椭圆上能否找到一点 P ，使得 $\Delta F_1 P F_2$ 的面积为 14？”这样的问题.

在学的过程中，我们倡导一题多解，举一反三，问题一般化，甚至可以发掘“存在性”这样的开放性问题，其实就是进一步的发现和提出问题，从而解决更深层的问题.

这需要我们在“做”的过程中勤思考，多提问，这样才能学到更多的知识与技能，书山有路勤为径啊！

2.3 悟——只缘身在此山中

片断 1:

变题 1: 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 ， P 是椭圆上的动点，则 $\Delta F_1 P F_2$ 的面积的最大值是.

生 3: 可以通过画图，可以直观地发现 P 是上、下顶点时，面积最大.

在上述片段中，“ P 是椭圆上的动点”是一个动态的问题，这就需要在变与不变中寻找两者的关系和平衡点，可以利用数形结合的思想，感知直观的图形，想象动态的运行轨迹，找到取得最大面积时所对应的点 P 的位置，体现了直观想象的核心素养.

片断 2:

问题: 已知双曲线 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 ，点 P 在双曲线上，且 $\angle F_1 P F_2 = 90^\circ$ ，求 $\Delta F_1 P F_2$ 的面积.

生 4: 设 $P F_1$ 和 $P F_2$ 的长度，但不需要把 $P F_1$ 和 $P F_2$ 分别求出来，直接整体法求 $P F_1$ 和 $P F_2$ 的乘积就可以.

在上述片段中，运算实际上也是需要一定的技巧，在假设焦点三角形的两条边 m, n 时，我们可以利用勾股定理（假如是非直角可以使用余弦定理）解三角形，但不需要分别求出两条边的具体长度，我们只需要算出他们的乘积 mn ，然后可以直接算出面积 $S = \frac{1}{2} mn \sin \angle F_1 P F_2$ ，体现了数学运算的核心素养.

片断 3:

问题：已知双曲线 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 ，点 P 在双曲线上，且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，求 ΔF_1PF_2 的面积。

生：计算得到面积是 36。

师：如果把 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 改成 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 呢？

生：同样可以计算得到面积是 $36\sqrt{3}$ 。

猜想并论证得到 $S = b^2 \cot \frac{\theta}{2}$ 的结论

在上述片段中，在得到了两组面积的数值之后，发现面积的数值可能和虚轴长有一定的关系；当变换角度时，又有一定的改变，说明和顶角也会有关联，对这组数据进行分析，包括双曲线中甚至是椭圆当中焦点三角形的面积都可以从数据当中观察、分析和论证，并能论证得到 $S = b^2 \cot \frac{\theta}{2}$ 和 $S = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$ 两个结论。体现的是数据分析的核心素养。

片断 4：

变题 2：已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 F_1 、 F_2 ，点 P 在椭圆上，若 ΔF_1PF_2 的面积的最大值是 $\frac{1}{2}a^2$ ，则椭圆的离心率为。

生 1：根据变题 1， $S_{\Delta F_1PF_2} \leq bc$ ，即 $\frac{1}{2}a^2 = bc$ ，易求离心率。

在上述片段中，点 P 的运动决定了面积的变化，即变化的根源在于点 P 纵坐标的变化，或者点 P 纵坐标的值对应了三角形面积的值，所以一方面可以由基本量求面积最大值，也可以通过已知最大面积去求基本量的关系（离心率），这个正向和逆向的逻辑思维过程，这是数学学习过程中最普遍也是最显著的环节，不仅仅是这里，其实学习数学的过程中无时无刻体现着逻辑推理的核心素养。

感想 3：

有人说，素养不仅仅是解题的能力，还包括除了能力以外的其他方面；也有人说，素养是高于能力的一种表现，是一种内在品质。

笔者从课堂上感受到，老师对素养的理解和诠释独具一格，整节课上素养是无形中渗透在“做”与“学”中，能力和素养不能简单地看成被包含与包含的关系，也不能单纯地看成是能力的进阶品质，应该是在知识使用、能力形成、道德培养过程中与之紧密结合的综合性产物。

正如之前笔者并没有对“三角形”有多少的感悟，通过老师的提点和渗透，突然发现一个小小的三角形，蕴含的哲理就很多——首先，都说三角形是最稳定的简单平面图形，而在稳定的观念下也会出现运动与变化，当然在运动与变化后仍然能回归稳定（最大面积），通过“变与不变”的相对论，教育我们看问题不要太绝对；其次，老师巧妙地借用三角形的稳定希望并祝愿高三的学生们稳定好心态，以饱满的精神状态来迎接 2019 年高考！

所以，并不是在“做”了以后“学”，也不是在“做”与“学”之后再去“悟”，而是在做中学，在学中悟，三者可以说是一个层层递进、互相渗透的过程，并没有明显的分界线，特别是高层次的感悟，是在知识、方法、能力的基础上并且与之紧密结合的标签物，也许这就是素养。

当然,素养并不是一下子就能养成的,笔者认为至少要保证两个方面,首先,需要足够多的机会去实践,包括观察、分析、解题,其次,要坚持足够多的时间,并不能期待解几个题,总结一下,就说出现了素养.素养的培养和凝练需要实践,也需要时间,当素养与学生自身紧密结合在一起的时候,也许就好比是一种将自己和数学海洋融为一体的感觉吧!

3 指导意义:

3.1 重视教材研究

教材是教学的依据,同样也是学生素养形成的蓝本,教材上的内容需要灵活使用,但更需要透彻解读,江苏省苏州中学是省内一流学府,学生层次也是在顶端,为什么老师仍然选择课本上的一道普通的练习题呢?正是显示出教材习题的基础性、一般性以及可拓展性.

多次参与高考命题的专家曾经说过:高考题的特点会是“源于课本、高于课本,似曾相识、若即若离”,说的就是高考题的原型来自课本,也可以说都是从课本上的例题、练习、思考题等进行改编或构造变式而来,考察知识与能力的同时,更凸显学科素养.

笔者认为,苏州地区对于“回归课本”理念的倡导和坚持非常值得一提,包括苏州市命题中心组一直对这个方面有所研究,并且有专门命制一类“源于课本又高于课本”的回归题型,受到了广大师生的欢迎.而作为学生也好,教师也好,都应该重视教材的内容,读懂教材,用好教材,就像老师拿出课本上的原题(不管是选修 1-1 第 40 页的第 9 题,还是选修 2-1 第 40 页的第 8 题),并不纯粹是为了让大家解这个题目,而是以此为基础,寻找通法,挖掘本质,突出思维,拓展变式,培养学生在观察中的主动思考能力以及直观想象的核心素养.

3.2 重视课堂活动

课堂是提升学生能力和素养的主战场,“向课堂的 45 分钟要效率”也是大家所遵循的标准和原则,活动的设置以及学生的参与情况直接影响到课堂效率的高低,同时也影响到学生能力与素养的提升程度.

课堂的活动是围绕学生精心设计的,学生是课堂的主体,所以在教学设计时,教师应对新课标的内容及理念把握透彻,结合教学内容、学生情况等合理设置问题和活动,并且不能只局限于分析和解决已设置好的问题,而是应该让学生提出自己对问题的理解,主动参与到问题的思考和分析中,从而发现问题背后所隐藏的一般性结论和数学哲理.

老师在对课本原题呈现后请学生描述对题干信息的理解及个人想法,不同的学生对问题的描述以及理解是不完全相同的,也有了不同的思路,有的学生尝试使用纯代数方法解点 P 的纵坐标,有的学生尝试利用勾股定理及圆锥曲线的性质求出两条直角边(也有想到直接用焦半径公式的),也有同学根据自身活动经验尝试通过对直角边的设而不求,整体代入,直接求面积.大家集思广益,用不同的数学眼光观察呈现的问题,就会有不同的思想迸发出来,交融在一起,引起了强大的共鸣和良好的学习效果,后来老师提到了改变 $\angle F_1PF_2$ 大小的情况,大家非常容易就想到勾股定理已不适用,但是可以借助余弦定理,换汤不换药,显示出学生对数学问题的敏锐观察力以及对数学知识的灵活处理力,同时,老师喜欢请学生讲,这一点笔者也非常赞同,这是为了培养学生的语言表达能力,特别是用数学的语言表达现实世界的能力.

只有学生主动地、高效地参与课堂活动,用数学的眼光、思维、语言去观察、分析和表达,才能更快地学习知识、培养能力、提升素养.

3.3 重视反思感悟

反思感悟是教学的生命线之一,同时也是一种重要的学习方式.教师需要反思,学生同样需要反思和感悟.

曾经听说过一位专家说过：一位教师备了三十年的课，教了三十年的书，可能成不了名师，但是一位教师上了三年的课，写了三年的教学反思和感悟，很有可能已经成为了名师。说的是有点夸张了，但是教学反思的重要性略见一斑。学生亦是如此。

反思感悟可以是自己静下心来回想、总结；也可以是进一步观察、总结、重新归类自己整理过的错题；也可以将自己的课堂心得和作业反馈记录下来；甚至可以自己尝试着写写数学小论文，记录和分享自己的学习经验和方法，反思促进了进一步的深度学习，可以说每一次的反思感悟都是一次思想上的升华，也是核心素养的进一步培养和深化。

没有反思感悟的学习，就好比是没有画上标点符号的句子，平淡而不知其意；没有反思感悟的学习，就好比是流水线上重复又无聊的动作，死板且毫无创新；没有反思的学习，就好比是没有经过磁盘清理的储存信息，杂乱而不成体系。

所以，悟是一个很重要的过程，缺失了它，学习将会被动，甚至没有生命，笔者认为一定要在前面“做”以及“学”的基础上，进行思考和总结，没有这些基础，悟就没有落脚点，就是空想、空谈。

4 结束语：

做，做的是基础，体现的是基础知识、基础技能、基本活动经验，基本思想方法，
学，学的是能力，培养的是发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力，
悟，悟的是哲理，渗透的是数学学科素养、科学素养、人文素养甚至是人生哲理。

以生为本的教学理念就是以学生为中心，培养学生的知识、能力以及素养的形成，让学生能够享受有质量的教育，成为全面发展的高素质人才。从做中学，从学中悟，为大家提供了一种高三复习课创新模式以及核心素养背景下的先进理念和指导思想，在今后的教学过程中有很大的借鉴意义。

[1]陈建权.落实数学核心素养的优秀案例——观摩朱占奎老师“点到直线的距离公式”示范课有感[J].中学数学教学参考,2018(34):26-28.

[2]孙四周.把数学问题还原为数学现象——谈“基于活动与体验的例题教学”[J].数学通报,2015,54(10):41-45.