起始课怎么上

——以《弧度制》为例

宜兴市丁蜀高级中学　周军

一个课题的开题课称为起始课，它往往是一个章节的第一课或其直接延伸，故又称为章节起始课.

所有老师都上过起始课，但是把起始课作为单独的研究项目，始于罗建宇、何睦，他们出版了这方面的中国第一本专著[1]，观点鲜明、眼光独到，为课堂实践和教学研究带来一股新风.受他们启发，我考虑了现象教学视角下的起始课教学问题.下面我就以弧度制教学为例来谈（说明：2019 年江苏省青年教师优质课的一个赛题也是《弧度制》，只是巧合，赛课视频我还没看.）

1 问题本身

“回到问题本身”是现象教学的唯一口号，要研究什么就直接面对它.其他的铺垫、渲染等，可以有，但并不必须有.

“弧度制”是什么？如果你说它是知识，当然是没错的.作为教师却不能停留在这里，还应当明白它是什么性质的知识，比如要认清它是陈述性知识、程序性知识，还是策略性知识.

弧度制有两个内容，一是弧度制的定义，二是弧度制与角度制的换算.如果把弧度制的定义当作陈述性知识，它的讲授就太容易了，用不了几分钟就能让学生知道“半径长的弧所对的圆心角”是什么意思.甚至不需要讲，学生看书照样学会.如果把弧度制和角度制的换算当作程序性知识，根据此前多次进行的不同度量制的换算，学生掌握起来也不觉困难.这么说来，本节课没有什么可讲的.常规上法就是先说说定义，再训练一下换算，然后记忆特殊角($\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}$等)，任务也就完成了.这样的教学，如果撇开划定“考试范围”这一条，老师的价值基本没有得到体现.

如果用现象教学的视角，将不是这样. 这节课的“问题本身”不是弧度制，而是“角的度量”，弧度制只是“度量”方式之一.然我们来面对角，去观察它、分析它、刻画它，而不是面对“弧度制”这个名词.在这个视角下，我们就必须讲清楚什么是角的度量、有哪些可能的度量方式、为什么要引进弧度制，以及什么是弧度制、它从哪里来又到哪里去……说穿了，“角”是一种现象，“角的度量”是人类活动，“弧度制”是人类活动的成果.用“1 弧度”作为单位来度量，比较简单，更容易被应用，因此就更为重要，也就被当做了一个重要范式，并被上升为科学或文化，如是而已.

【我的设计】

师：请同学们拿出纸和笔，我们来画三角形.

生：（准备）.

师：先随便画一个三角形.接着，画一个小一点的三角形、再画一个更小的、更小的、小到看不见……（学生一直在画）

回到第一个三角形，现在来画一个大一点的、再画一个更大的、更大的、大到超出纸面的……用手在空中比划一个，它可以超出这个宇宙……

师：这些三角形小到看不见，大到超出宇宙，它们的内角和——

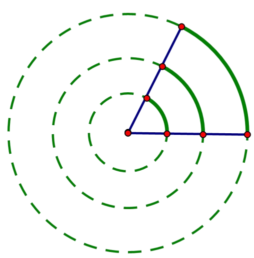
生：都等于 180°.

师：大大小小，内角和都一样，为什么？

生：因为角的大小与边的长短无关，角的边是射线.

师：所以，我们度量角并不是度量角两边的长度.那是度量什么的？

生$_1$：度量角对边的长度.
师：那么是不是对边越长，角就越大？
学：不是。
生$_2$：度量角所对的弧的长度.
师：是不是所对的弧越长，角就越大？
生：还不是。
生$_3$：是度量角所对弧的度数.
师：什么叫弧的度数？
生$_3$：就是看那段弧含有多少度.
师：那么，1°的弧是怎么定义的？
生：就是一个圆周的360分之一.
师：很好.我们回到了角度制的定义，就把问题看清楚了."1°角"是指圆周360分之一的弧所对的圆心角.那么，这里定义的1°角与圆的半径长短有关系吗？
生：没有，都是把圆周360等分，每个圆的每一个份所对的圆心角都相等，都是1°角.
师：那么，给你一个圆，你会把它360等分吗？
生：不会.
师：如此说来，要想得到1°的角并不容易.
生：用量角器.
师：量角器也是人造出来的，又该怎样制作量角器上的刻度线呢？……实际上，人类需要测量的东西很多，最容易测量是什么呢?
生：是长度。
师：对，是长度.其他的，像面积、体积等都不是直接测量的，是通过长度计算出来的.就算是温度、重量、电流强度等，这些与长度无关的量，也都转化为对长度的测量，比如温度计、杆秤、电流表等。就是对时间的测量，也是转化为长度的。这些都不奇怪，人的眼睛能够看到的就是长度。那么，角的测量是不是也这样呢？
生：……
师:现在,你自己可以画一个圆周……但是你手里并没有它的360分之一,你有什么呢？
生：有半径.
师：如果我们用半径长来量出一段圆弧，再画出这段圆弧所对的圆心角，是不是可以确定出一个角来？
生：……（疑惑：什么叫"确定出一个角"？）
师：在不同半径的圆中，长度等于半径长的弧所对的圆心角是否相等呢？
生：（不明白）.
师：我们来画几个看看.
（操作：拿出几段长度不同的漆包线（软硬适度，便于弯折的那种，颜色要鲜艳一点)。用这些长度做半径画同心圆，再把漆包线弯成弧形，截取一段弧，画出所对的圆心角，如图1.）.

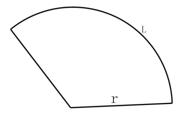


由此可以看到，在不同的圆里，弧长等于半径长的弧所对的圆心角大小相等.这个角很特别，我们就称它是1弧度的角，记为1rad.（写出完整定义（此处略））
师：定义1rad的角，是想干什么？
生：可以用这个角区度量其他角.
师：你能画出2rad的角吗？
生：(两个半径长的弧所对的圆心角，用半径长的漆包线截取两次即可)

师：3rad 的角呢？

生：截 3 次.

师：一般，我们可以画出任意 $n(n\in N^*)$ 弧度的角.（稍作停留，让学生回味）。反过来，如果给定了弧长，能否知道它所对的圆心角是多少弧度？比如弧长是 L，所在圆的半径为 r.



生：$\dfrac{l}{r}$.

师：写成公式就是……，$|\alpha|=\dfrac{l}{r}$（rad）.

这就可以用弧度表示所有的角了，我们称这个度量角的制度叫弧度制，以区分原来的角度制.

上面的这个公式比原来的 $n=\left(\dfrac{180l}{\pi}\right)^{\circ}$ 简单多了，它还使得科学上的很多公式得到了简化，因此非常好用.以后用弧度制表示角时，弧度单位（rad）可以省略.

上述的教学过程，不是告诉学生什么样的角是 1rad，而是从“怎样度量角”开始，把这个当作问题的起源，也是活动的出发点.很自然地发现可以用“手里已有”的半径作单位，于是引进了一种度量形式.或许有人会说，如果用半径当弦，不是也可以定义一个圆心角（这个角是 60°）吗？问题是，如果用这个圆心角做单位的话，弦的长度等于两个径时所对的圆心角就不是 2 单位，这不符合我们的心理预期.当然，如果学生没有提出这样的问题，老师不必要主动涉及（为了保了保持生成的流畅性）.类似的，大圆和小圆中，长度等于半径的弧所对的圆心角相等，这一点也是不去证明的.利用人的直觉，在教学中不但是可以的还是提倡的，只要直觉符合逻辑就不必生硬地转到逻辑上。

在公式 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$ 出来以后，弧度制的概念就算是建立起来了.

2 联系与结构

任何一个独立的概念都是没有价值的，也是不容易记住的.在新的概念形成后，就要和原先的认知体系建立联系，向着结构化方向发展.布鲁纳的观点是：教授任何一门学科，都必须让学生理解这个学科的基本结构。

【我的设计（续 1）】

师：我们来画一个稍微大一点的角，6 弧度的.

（说明：上面已经画过 2 弧度、3 弧度的角，可是在画 6 弧度的角时学生产生了纠结.原因是：它有没有超过 1 周角？这不是能用眼睛看出来的，必须经过精细的计算——“计算”的“欲望”应该由学生自己生出的，千万不能当作任务布置给学生.如果老师说“请大家计算一下，一周角是多少弧度”，这个活动就变成了“计算题”，一个很好的教育机会就被废掉了）

生：(要比较 6 弧度角和 1 周角的大小，就必须知道 1 周角是多少弧度.联想到上面的公式，知 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}=\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi$（rad）.

（但是，新的疑惑又出现了，那就是“2π 到底算多少弧度？”）

师：2π 到底算多少？你说呢？可以彼此讨论一下.

（要说他们一下子就知道 $2\pi\approx 6.28$ 还真不一定.虽然经过讨论或者老师提示，这一点容易解决。不经讨论或思考就告诉结果，是不好的）。

师：π是个实数值，大约是3.14。如此，2π=6.28>6，于是知道1周角大于6弧度.

师：再请问直角是多少弧度？

（这里学生可能直接根据1 周角的四分之一，说出直角的弧度数是$\dfrac{\pi}{2}$，那最理想了。如果不能，就有下面的过程）

生：……？（活动，有的学生会猜测，可能是1点几弧度）

师：用什么办法来度量它？

生：应该用弧长量出一半径，可是又没有弧长没有半径.

师：确实，给你一个直角，它没有自带圆周.有办法吗？

生：作一个圆周.

生$_4$：我算出来了，是$\dfrac{\pi}{2}$弧度. （师继续等待）

生：(自发讨论：什么叫$\dfrac{\pi}{2}$弧度？怎么来的？）

师：请xxx（生$_4$）说说他是怎么做的.

生$_4$：以直角顶点为圆心画一个圆.

师：(插话）多大半径？

生$_4$：随便多大.那么直角所对的弧长就是$\dfrac{2\pi r}{4}=\dfrac{\pi r}{2}$，再除以$r$，角的弧度数就是$\dfrac{\pi}{2}$.

师：大家认为如何？

生：(同意）.

师：$\dfrac{\pi}{2}$弧度算是多少？

生：1.57弧度.

师：也就是说，直角是1.5个弧度多一点点.那么，平角呢？一周角呢？（学生活动）总结一下，有下面的结果（板书 ）：

> 1周角=360° $=2\pi$弧度
>
> $180^{\circ}=\pi$弧度，
>
> $1^{\circ}=\dfrac{\pi}{180}$弧度$\approx 0.147$弧度；
>
> 1弧度$\approx 57.30^{\circ}=57^{\circ}18'$

练习：把下列特殊角换算为弧度制：

角度数	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
弧度数								

上面做了两个事情，一是给定弧度数，画角；二是给定角，“度量”出它的弧度数.延续了“角的度量”的初衷，并把数学定义落实到具体情境中.在“求直角的弧度数”的时候还需要人为添加一个圆，这是对概念的应用，也加深了对弧度制的理解.

在这个过程中出现了“ 360° =2π弧度”，自然导出弧度制和角度制的换算.在应用中理解，在应用中感悟出新的知识，是很好的策略.

以前我都是根据“1周角=360° =2π弧度”（这也是教材上推荐的），以演绎的方式“推导”出弧度制和角度制的换算关系，这种方式非常直接也非常符合人的直觉，极容易记忆，

效果很好.我目前还分不清这种教学法与上面“我的设计（续1）”孰优孰劣，也许不需要分出优劣吧，喜欢就好.

有一点需要说明,我们对“6弧度”、“6.28弧度”有较为清晰的认识，而对“2π弧度”其实很模糊。让学生知道“2π弧度大约是6.28弧度”、“$\frac{\pi}{2}$弧度大约是1.57弧度”还是很有必要的.这是为了把知识直觉化，只有直觉化的知识，才能自由运用。

3 背景与展望

一般来讲，起始课会介绍知识的产生背景、逻辑演进并对应用前景作一下展望，这其实是哲学基本问题“我是谁、我从哪里来、我到哪里去”的具体化.现象教学的起始课同样要关注这三个问题，这在“现象教学五原则”（整体性原则、真实性原则、还原性原则、生成性原则、潜教育原则）中可以清楚地看出来.

介绍历史事实，容易找到知识的固着点；理解逻辑顺序，容易建立知识结构；展望应用前景，可以提高学习兴趣、增强学习动机.

【我的设计（续2)】

师：角的弧度数可以超过2π吗？（然后然学生画出下列角：$\frac{9\pi}{4},\frac{25\pi}{6},\frac{16\pi}{3}$ ）.

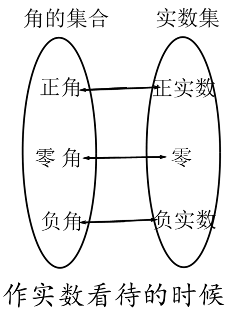
师：角的弧度数可以是负数吗？（然后然学生画出下列角：-1，$-\frac{\pi}{4},-\frac{7\pi}{6},-\frac{10\pi}{3}$）.

师：角的弧度数上限可以到多少？下限可以到多少？中间可以取哪些值？

生：正的可到无穷大，负的可到无穷大，中间可以取任意实数.

（这里可以写出同终边角的集合表示$\{\beta\mid\beta=2k\pi+\alpha,k\in Z\}$)

师：总结出下面的对应关系（板书):



师：当我们把角的弧度数当作实数看待的时候，对它的运算、求解等等都会带来很大的便利.相信同学们对度分秒运算时的困难已有所体会,那样的困难在弧度制里已经消除.是谁那么机智，发明出用弧度制来度量角呢？

4 知识拓展

接下来是历史介绍，从度分秒制、弧度制、密位制，谈角的度量演化史，让学生了解人类不停的探索历程，可详可略(以下的延伸阅读材料来自网上)：

1弧度这个单位太大，虽然理论上方便但在实际中用起来不便于精确度量（特别是在军事上)，于是毫弧度（mRad）就应运而生。“毫”通常是指一千分之一，显然：1Rad=1000mRad 它的意义为:在半径为1000的圆周上,1个单位的弧长对应的圆心角为1毫弧度。对于360°的圆周，就有：360°=2πRad=2000πmRad≈2000×3.1416mRad=6283.2mRad.因为6283.2不是一个整数，人们便将它取整。俄罗斯人将其取整为6000，它的优点是计算方便。以法国为代表的西方国家将其取整为6400，它的优点是在制作机械罗盘时，进行6次二等分后它为100，是个整数，容易画刻度。也有的国家将其取整为6300，这个取法的优点是与毫弧度最为接近，不过意义不大。取整后这个角度单位就不能称为毫弧度了，于是给它取了个新

的名字叫mil。有人说它最早是由德国人创立的，估计该角度单位最早应该用在航海上。mil翻译成中文叫密位,可见密位是由毫弧度转化来的,二者非常接近。于是就有:360°=6000mil（俄制）或360°=6400mil（法制）.

咱们中国呢？大陆采用6000 密位制，台湾采用6400密位制。在角的度量上，咱们中国早就实行了一国两制。随着计算机的广泛应用，计算已经不是问题，所以在有计算机的系统中不再使用密位作角度单位，而是直接用毫弧度了，因而自动在新观念下实现了统一。

在谈背景与展望时，应当注意以下几点：

（1）注重人类思想进步的脉络，略去琐碎的细节，对细节的过分关注有害于对事物的整体理解.很多时候没有必要强调谁谁谁领先世界多少年，那种廉价的虚荣心不需要.即使从“爱国主义”角度看，如果在领先的某个点上大肆渲染，在不领先的地方怎么说？在世界越来越一体化的今天，不能给学生留下这样的潜意识：我们要和全世界比高低.应该融入世界而不是征服世界,这是价值观也是胸怀.

（2）描述前景时只能向学生介绍能听懂的，或者稍加解释就能听懂的部分，完全听不懂的不能介绍.人不是因为看见而知道，而是因为知道而看见.你看见一棵树却没有看见那是一棵松树，是因为你知道“树”而不知道“松树”；你看到那是一棵松树，却没看到那是棵古松，是因为你知道“松树”却不知道“树龄”；你看到那是棵古松却没看到那是“五大夫松”，是因为你不知道那棵树的祖先被秦始皇封过官。而这棵树的管理员很可能看不见“松树”，他只会看见“五大夫松”……人只能看到自己知道的东西，只能看到所懂的那一个层次.超出这个层次的，凭口头告知根本没有效果.比如在弧度制这节课上，就不适合介绍炮兵是怎样用“密位”瞄准目标的，尽管它很有趣.

（3）起始课上要不要介绍整个课程（一整章或一整节）的概念图？我认为没有必要，如果要介绍也只能介绍学生能懂的部分.如果你介绍了他们不懂，坚决不介绍（参见（2））.当然，概念图在总结课上倒是很有价值的。

结语

起始课尤其要“以学定教”，因为它是为后续教学“定调”的.

老师对知识的了解肯定远远多于教材所给予的，不要把课堂变成知识的展示厅.凡是学生不能参与的活动，都是无效的.弧度制这节课，“我的设计”及“续”里反复让学生画图，就是要让他们充分活动，以获得切身体验，体验过的才能被感悟.

关于角，欧几里德说“角是一种关系”.也就是说，他不把角当作是一个独立的存在.这是什么意思？来看看公式：$|\alpha|=\frac{l}{r}$，它显示角是一种比值.再看另外几个角：两条异面直线根本就没有相互接触，它们的角是人为规定的；“斜线和平面所成角”、“二面角”、“高维向量之间的角”等，都是认为引进的一种量。可以说，叫是用以反映“一个对另一个的倾斜程度的”，就连直线和平面平行，我们也规定了“它们之间所成的角是0”.所有“角”都是两者之间的，没有“一者之间”的角，也没有“三者之间”的角。

我们说“弧度单位可以省略”，而从量纲上看，$\frac{l}{r}$根本就没有“单位”。也就是说，“弧度（rad)”既不是基本单位也不是导出单位。它是什么？是一种记号，用于区分“度⁰分'秒"”的。我们现在一说到“1周角”就想到“360°”，似乎它们是同一个东西。其实，“1周角”并非天然就是“360°”，那是人为赋予的，是从小所受的教育给了我们一个固定认识。书写时“省略弧度单位”，实则是回到了弧度制本身（无单位）。

说角是一种关系，欧几里德的观点太领先了，以至于领先于我们这个时代。当然，这也没有必要向学生介绍，如果他们确实有兴趣，可以通过阅读（书本、网络等）而获得.

给予学生知识，他们能学会；给予学生现象，他们能观察。虽然最后都能得到知识，但

来路和前景不一样。现象教学让人直面真实的世界，让人学会独立的思考。这是着眼于人的发展的教学，而不是让人去继承什么或记忆什么。

目前，世界各国都在呼吁教育变革，为什么？显然是对教育现状不满意。那么，改什么？肯定不能停留在技术、手段和技巧上，必须有观念上的转变。如果用先进的技术、娴熟的手段、高超的技巧，去落实旧有的观念，那就不是“变革”而是“强化”。

教育的变革从观念开始，教学的变革从起始课开始。现象教学的起始课，有变革的意味吗？

参考文献

[1]何睦，罗建宇，高中数学章节起始课的教学研究与案例设计[M].哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.5.

[2]孙四周，现象教学[M].长春：吉林教育出版社，2019.5.

[3]水菊芳，从情境到现象：再进一步的数学教学[J].教育研究与评论，2018.3（10-14）人大复印报刊资料，初中数学教与学，2018.7（33-35）

[4]孙四周，现象教学的内涵与价值[J].教育研究与评论，2018.3（5-9）

[5]李宏铭，数学现象教学的实施及评价概述[J].教育研究与评论，2018.3（15-19）