

# 从循证历史到观照逻辑：数学概念教学中高阶思维的进阶策略

宜兴市丁蜀高中 周军

摘要：应用学习进阶理论，在数学概念教学的过程中以“联想与结构”、“活动与体验”、“价值与评价”等为“阶”，立足历史与逻辑的视角，发展学生的直觉思维、形象思维、发散思维以及创造性思维等，引导学生的思维层次由低阶思维向高阶思维迈进。

关键词：概念教学；学习进阶；高阶思维；思维支架

数学概念是构成数学教材的基本结构单位，是数学知识的核心。概念教学至关重要，它是数学思想方法和数学思维方式的孵化器，也是数学抽象、逻辑推理等数学核心素养的培育场。高阶思维是发生在较高认知水平层次上的心智活动或认知能力，<sup>[1]</sup>数学概念学习过程中的直觉思维、形象思维、发散性思维和创造性思维都属于高阶思维。<sup>[2]</sup>

学习进阶是学生在各学段学习同一主题概念时所遵循的连贯的、典型的学习路径的描述，一般呈现为围绕核心概念展开的一系列由简单到复杂、相互关联的概念序列。<sup>[3]</sup>高阶思维作为思维的高级形式，理应成为学习进阶的目标导向，在数学概念教学中应用学习进阶理论，为学生提供发展高阶思维的有效路径，并且在认知发展的关键处提供可靠的脚踏点和支撑点，进而实现思维品质的进阶。

## 一、联想与结构：概念教学中指向高阶思维进阶的基础

数学概念往往以其高度形式化和符号化的特性展现一种“冰冷的美丽”，让学生望而却步。如何将这种抽象的学术形态转化为承载“火热思考”的教学形态，是实现数学教育增值的关键问题。概念教学可以尝试联想、结构的打开方式，融入背景，构建系统，从而激活学生的高阶思维。“联想”是唤醒学生的个体经验，“结构”是通过教学活动对经验和知识的整合与结构化。联想与结构意在强调个体经验与所学知识在概念教学中是相互成就的，是经验与知识的相互转化。

### 1. 联想：基于学生的直觉思维

学习数学首先要培养学生的直觉思维，学会从整体上考察思维对象，调动自己的全部知识经验，通过丰富的想象作出敏锐而迅速的假设、猜想或判断。以人教A版高中数学必修第二册《平面与平面垂直》教学为例，学生在初步整体感知平面与平面的位置关系以后，引导学生交流两个平面相交的现实形象，从而初步感知引入二面角刻画两个平面相对位置的必要性，体验数学研究的一般思路——为了定义平面与平面垂直，需要引入两个平面所成的角，由此先引进二面角的概念。对于“二面角”的教学，一方面应注重单元间、学段间潜藏的数学知识前后勾连，通过联想、调动、激活以往的知识经验理解和建构有逻辑、有体系、有结构的新知识；另一方面也需关注数学概念的历史流变，唤醒学生的现实体验，通过历史循证，重构教学环节。如以下教学片段。

师：上节课，我们学习了空间直线与平面垂直的内容，研究了直线与直线垂直和直线与平面垂直之间的联系与转化。类比研究空间直线、平面平行关系的过程，接下来我们应该研究什么关系呢？

生1：应该是平面与平面垂直的关系。

师（追问1）：你能说说前面我们研究每种关系是按照怎样的顺序进行的吗？

生1：按照定义、判定、性质的顺序进行，我觉得平面和平面垂直也可以这样操作。

师：不错！下面，我们先来研究两个平面垂直的定义，之前有过类似的定义垂直的学习经验可以借鉴吗？

生2：直线与平面垂直的定义是直线与平面内任意直线都垂直，所以直线与直线垂直是基础。平面几何中，先定义了角的概念，然后利用角来刻画两条相交直线的位置关系，进而研究两直线垂直这种特殊情况。

师（追问2）：很好！显然，两个平面垂直是两个平面相交关系的特殊情况，类似地，定义两个平面垂直前先要研究什么问题呢？

生2：肯定是研究两个平面所成的角。

师：能不能结合生活经验，举例说明呢？

生3：例子很多。比如，翻开书本的过程中，两页纸面呈现一定角度；教室的门在打开过程中，门面和墙面形成一定角度；还有，在水库可以见到堤坝面和水面也成一定角度。

师：实际上，这些“角”就是刻画两个相交平面相对位置的重要指标，我们称之为二面角。那么，怎样定义二面角呢？

生4：我觉得两个平面相交，会出现一个“豁口”，这就是二面角。

师：你的观点具有历史相似性。T. walker 的《Elements of Geometry》(1829)指出，两个平面相交，一定会形成一个开口（opening），无论开口是大还是小，这个开口叫做平面角。注意，当时还没有提出二面角。

生5：我认为生4说法不明确。类比平面内两条相交直线形成四个角，空间中两个相交平面形成的开口也有四个，因此有必要进行区分。

师：有道理！那么，你能给出明确的定义吗？

生5：根据平面内角的定义是一点出发的两条射线组成的图形，类比到空间，两个相交平面的交线将其划分为四个半平面，从交线出发，选定其中两个半平面，就可以组成一个二面角。

师：非常好！你的想法是有历史依据的。G. Benjamin 在其《Elements of Geometry》(1859)中写到二面角是由两个相交的平面形成的角，二面角作为一个图形的概念被独立提出，但与现行教材不同的地方是没有明确指出二面角是由两个半平面组成的。M. Sykes 和 C. E. Comstock 在合著的《Solid Geometry》(1922)中给出二面角的定义：两个具有公共边界的半平面形成图形是二面角。同时，给出面和棱的概念，以及二面角的命名方式。这与我们教科书的叙述方式是一致的，明确了二面角的概念、二面角的棱、二面角的面等独立的概念。

新知识带来的难点在于学生无法直接将其与自己搭建关联，教学中，教师通过回忆旧知、追溯历史的方式为新知识的深度理解构建脚手架，建立联系，这是对学习进阶理念的实践回应。<sup>[4]</sup>经验为先，以史鉴识，学生从记忆走向发现，充分发展高阶思维。

## 2. 结构：培养学生的形象思维

学习进阶需要引导学生以融会贯通的方式对学习内容进行组织，从而形成自

己的知识结构。学生对《平面与平面垂直》的研究思路进行整体把握后，会发现二面角是刻画平面与平面相对位置关系的重要几何量，具有最直观的历史和经验表象，所以形象思维始终伴随概念教学。从学生的思维进阶流程分析，呈现串“象”成链的认知样态：前概念 → 概念表象 → 概念心象 → 概念意象。

对于二面角的教学，教师尝试引导学生对“二面角”的形象进行欣赏品味。学生联系初中平面几何中的角，二面角是否符合这样的形象呢？这是学生认知的前概念。学生联想生活实例，感知二面角的概念表象，这种由两个面形成的“开口”是清晰可视的，但其实会存在一定的迷思干扰，学生会自觉将这种空间角同化为经验中的平面角。教师提供数学史料，学生思辨感悟，从现实背景走向数学化，二面角有了符号化的呈现，形成概念心象。二面角是有大小的，如何度量成为思维进阶的着力点。依据经验，将空间角转化为平面角是必由之路。关键在于，什么样的平面角能反映二面角的大小？如何找出这样的角？有什么方法或规律可循？这些疑问将学生带入“愤悱”之境，思如泉涌，拓展概念意象。

学生在概念学习中，系统化的知识建构打通了知识和能力的阻隔，向运用层面迈进。学生对概念的认知，经过由理解到迁移的过程，由浅入深地发展形象思维。同时形象思维也在渗透理性思维，学生在概念学习过程中不断深化“二面角”形象的丰富内涵，思维品质在不断升级。

## 二、活动与体验：概念教学中构建高阶思维支架的关键

以“活动与体验”的方式助力学生“思维爬坡”，实现从低阶思维向高阶思维的跃迁。<sup>[5]</sup>“活动”是指在教师的组织下以学生为主体的主动活动，“体验”是指学生在活动中生发的内心体验。学生主动活动的过程，是其全身心体验知识的丰富内涵与意义的过程，也是生发丰富的内心体验、提升个人经验与精神境界的过程。学生在“活动与体验”中从概念的外部形式深入到内在意义，通过现象层面进入思维层面，促进思维进阶。

### 1.活动：激发学生的发散思维

教师引导学生从现有水平能操作的活动出发，经历一系列有内在关联的活动，让学生主动地去思考。发散性思维表现为个人的思维沿着许多不同的方向扩展，最终产生多种可能的答案，因而容易产生创见。概念教学中的活动与学生经验建立紧密联系，通过个性化的操作确认培养学生的发散思维。如以下教学片段。

让学生拿出一张矩形卡纸，进行下列活动：

活动1：你能用卡纸折出一个 $90^\circ$ 的二面角吗？（说明：学生凭借直觉很快完成。）

活动2：你能把这张纸折成 $60^\circ$ 的二面角吗？（说明：同样也能完成。）

活动3：你怎么确保折成的二面角就是 $90^\circ$ 或 $60^\circ$ 呢？请加以证明。（说明：普遍学生会用量角器或三角尺度量矩形与折痕垂直那条边被折出角的度数，他们习惯让折痕与某条边垂直，事实上他们度量的就是二面角的平面角。）

师：不经意的精彩！同学们的认知过程正是许多数学家探究心路的历史重演。T. Walker 给出了一条定理：两个平面形成的角可以用从交线上一点出发的两条垂直于交线的直线所夹的角来度量。M. Sykes 提出平面角的概念：从两个平面的交线上任取一点，过该点分别在两个平面内作垂线，垂线形成的夹角称为平面角。M. Sykes 给出两个定理：1. 一个二面角的所有平面角都相等；2. 如果一

个平面垂直于二面角的棱，它与两个面的交线形成平面角。这里的第二条定理是用于寻找二面角的平面角的一种好的方法。另外，M. Sykes 给出一个动手活动：通过剪切、折叠卡纸来制作一个二面角，并展示测量二面角大小的过程。

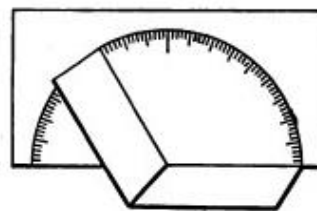


FIG. 28

图 1

活动 4：请把卡纸剪成不规则的形状，再折成一个二面角，然后画出你认为合适的平面角并度量大小。（说明：在这样的材料中学生只能看见二面角，但看不见平面角，如果要度量大小，就必须作出与棱垂直的射线。这个过程需要学生借助测量工具不断尝试调整，最终建构清晰可测的平面角的意义。学生经历了充满批判性和挑战性的思维历练，数学素养不断提升。）

汇总展示学生的四种画法，让学生说理思辨。

师：请大家观察几种画法，哪种平面角可以度量二面角的大小，哪种不可以？说明理由。

生 1：如图 2(1)，分别在两个半平面内任取一点，过该点作一条射线，这两条射线所成的角。这种作法，可能得到的不是平面角。

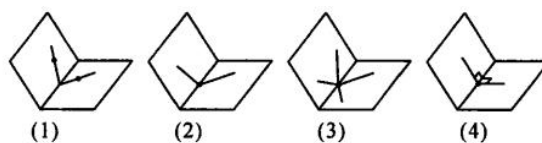


图 2

生 2：如图 2(2)，过棱上一点在两个半平面内分别任意作一条射线。这样的角的大小会由于所作射线的位置不同而变化，显然不确定、不唯一。

生 3：如图 2(3)，过棱上一点在两个半平面内分别作一条与棱成定角（如  $60^\circ$ ）的射线。这样的角也不是唯一确定的，而且对于两个半平面重合和合成一个平面的特殊情况，角的大小并没有对应  $0^\circ$  或

$180^\circ$ （如图 3(1)、3(2)），因此也不合适。

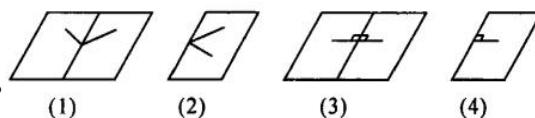


图 3

生 4：如图 2(4)，过棱上一点在两个半平面内分别作一条垂直与棱的射线。这样的角会随着二面角张口幅度的变化而变化，是唯一确定的。

师（追问）：为什么这样的角能唯一确定呢？

生 4：因为在一个平面内经过棱上一点只能作棱的一条垂线，另外，根据等角定理，点的位置也不影响角的大小，即使对于  $0^\circ$  或  $180^\circ$  的情况也适合，所以这样的角不仅存在，也是唯一的。

师：同学们的视角很开阔，思维很发散。事实上，你们已经在沿着数学家的足迹探究问题。G. A. Wentworth 在其《Elements of Plane and Solid Geometry》(1879) 中论述了为什么平面角的边必须垂直于棱。在图 4 的长方体中，二面角  $F-AB-H$  是一个直二面角，并且可以被角  $CED$  度量。角  $CED$  的两条边分别在平面  $AF$  和平面  $AG$  里，并且两条边都垂直于直线  $AB$ 。注意到，图 4 中另外画出的角  $C'E'D'$  是锐角，角  $C''E''D''$  是钝角，都不能合理地刻画直二面角  $F-AB-H$ 。

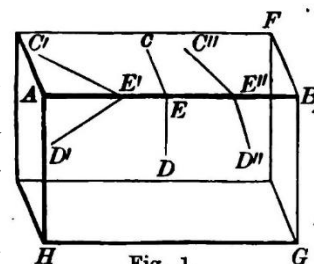


Fig. 1.

图 4

## 2. 体验：深化学生的发散思维

学生在活动中聚焦“度量”这个数学一般观念，通过操作确认、理性思辨，体验二面角从可视到可测的认知过程。从空间问题的研究思路角度，体会类比和转化的重要思想；从度量的内涵和本质角度，体会“存在性”和“唯一性”价值意义；从历史溯源的角度，体会数学家的思维方式和理性精神；从学生的交流和表达角度，体会主动发现、个性理解、思维发散的心路历程。

以上环节将问题解决的策略融通于活动与体验中，学生在活动中体验数学概念的背景、生成和发展，激发了多角度、多层次的思维演进，从而触及概念内涵的不同层面，达到认知视野的融合，这样的发散思维也就明显走向了高阶思维。

## 三、价值与评价：概念教学中高阶思维进阶的保障

概念教学过程中渗透价值判断与多元评价，同时将感性认识与理性思考巧妙结合，在情智交融中进一步培养学生的高阶思维能力。

创造性思维是指有主动性和创见性的思维，在这一过程中，以想象、联想、直觉等思维活动为基础，产生新颖的、独特的思维成果。学生用理性的眼光审视概念，形成自己的判断，对已有知识进行深度加工，在概念理解与建构的过程中培养了创造性思维能力。如以下教学片段。

师：图4中的直二面角刻画了平面与平面的垂直关系，这也是平面与平面垂直的定义。那么，还有方法判断平面与平面是否垂直吗？请大家思考一个问题：直线 $l$ 和平面 $\alpha$ ， $\beta$ 之间有以下三个关系： $\alpha \perp \beta$ ， $l \subset \alpha$ ， $l \perp \beta$ 。如果任意取其中两个作前提，另一个作结论构造命题，能构成几个命题，并判断其真假。可以利用桌面、地面、课本当作平面，手中的笔当作直线进行直观验证。

生：能构成三个不同的命题：

$$(1) \left. \begin{matrix} l \subset \alpha \\ l \perp \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta; (2) \left. \begin{matrix} \alpha \perp \beta \\ l \subset \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow l \perp \beta; (3) \left. \begin{matrix} \alpha \perp \beta \\ l \perp \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow l \subset \alpha。其中命题(1)$$

正确，命题(2)(3)错误。

师：同学们的判断是正确的。下面，我们针对上述命题进行一些探究活动。

探究1：同学们能不能对命题(1)加以证明呢？

探究2：为什么命题(2)不成立？能否举例说明？能否改变或增设条件，使得该命题成立？

探究3：在命题(3)的条件下，结论中的直线与平面有几种可能的位置关系？如果该命题成立，需要增加什么条件？

探究4：请同学们从上述探究活动中提炼正确命题，归纳研究空间问题的一般思路。

探究5：回顾反思学习的心路历程，撰写心得体会，进行经验分享。

以上环节中，教师创设开放性的问题情境，让学生深入体会数学定义、判定、性质之间的联系。在对结构不良问题的证伪、存真和变式的过程中，学生主动与数学概念深度对话，与创新思维融合发展。学生在评价反思的过程中，逐步发现、体悟概念的内涵与外延，积淀可持续迁移的数学活动经验，形成创造性地思考、解决问题的思维自觉，实现理性精神的重构和发展。如学生在学习反思中写道：

对于“二面角”的理解，我经历了“看山是山，看水是水；看山不是山，看水亦非水；看山还是山，看水还是水”的三层境界。初识二面角，生活中处处皆是，给人以“角”的形象，其实是一个“张口”，但和潜意识中数学化的角似乎

不一样；再识二面角，具象的二面角是有大小的，可以度量，这就和以前学过的平面角是一致的，那么，空间角向平面角转化是必由之路；三识二面角，什么样的平面角堪当“度量”的大任呢？经过直观感知，操作确认，思辨验证，终于找到那个不仅存在而且唯一的角。数学探究如此层次各异，人生历练亦或起伏未定。

学生反思的文字，感性中裹挟着理性，厚实中点缀着创新。

指向高阶思维的数学概念教学经历“联想与结构”、“活动与体验”、“评价与反思”等阶段，学生穿行于忆、思、悟之间，思维与情感激烈碰撞。随着这些思维环节的交替并进，学生的高阶思维能力持续发展，真正实现数学概念的实践应用、高阶思维的进阶和核心素养成长的深度融合。

#### 参考文献

- [1]吴飞飞，佟雪峰. 高阶思维取向课堂提问的策略研究[J]. 教学与管理，2018(9)：99-101.
- [2]管红娟. 合理设计数学问题 培养学生高阶思维[J]. 上海中学数学，2018(6)：42-44.
- [3]郭玉英，姚建欣. 基于核心素养学习进阶的科学教学设计[J]. 课程·教材·教法，2016，(11)：64-70.
- [4]周军. 思维支架：学习进阶撬动深度课堂的着力点[J]. 中小学数学：高中版，2018(11)：1-4.
- [5]周军. “数列中的存在性问题”进阶教学[J]. 江苏教育(中学教学)，2021(5)：44-47, 52.