

二面角教学的三种形态：知识、情境、现象

江苏省陶都中等专业学校 潘静

案例 1 二面角及其平面角教学

A 知识教学

告诉学生：我们经常会遇到两个平面相交所成角，也就是二面角的大小问题。比如太阳运行的轨道面（赤道）与地球运行的轨

道面（黄道）相交所成的角是 $23^{\circ}26'$ ，

地球上的经度从 0° 到 180° （均提供图形）等等。然后指出二面角是一种空间角，用以测量其大小的是二面角的平面角。最后给出严格的定义，并通过练习加以巩固。

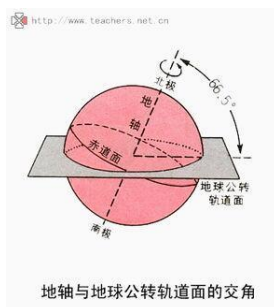


图 1

这些都是人类已有的现成知识，老师的定位就是把它们教给学生（为了继承人类文明的优秀成果）。老师向学生提供的素材（黄赤交角、经度）都是真实的也都是重大的概念，但是离学生的生活经验太远，因而这样的素材所带来的仅止于对信息的了解，而无法从素材出发得到对意义理解、迁移和展开。事实上，黄赤交角和地球经度比单纯的二面角更远离学生的生活经验，也更难理解。翻开书本或者折一张纸就能“看到”二面角，而黄道面与赤道面实非容易想见。从教学逻辑上说，不应该通过它们来学二面角，而应该是学了二面角后才来认识它们。因此，尽管老师或教材提供了这些素材，冀以帮助学生理解概念，但这个希望必然落空。在实际教学中二面角及平面角的意义依然是由老师告诉学生，也就是只能采用讲授法教学。

B 情境教学

向学生展示容易看懂的实物材料，比如笔记本电脑的开合、书本的开合、门与墙面的位置等，让学生“发现”这里是有角的。接着“发现”这些角是有大有小的，学生能“发现”用笔记本边沿所成的角（图 3）来度量大小。



图 2



图 3



图 4

老师确认后，告知他们这就是二面角的平面角概念，并说

明一下这可以用它来度量二面角的大小。以下是练习巩固，包括变式练习，形成方法和能力。

笔记本电脑的开合、书本的折叠、门的转动中，所涉及的“半平面”都是矩形，学生很容易看到矩形的边形成了可变的角（图 3），而这又恰好是老师希望呈现给学生的平面角。当学生说出那个角以后，老师就以为探究完成了，点评几句，皆大欢喜。这样的教学看似生动、高效，但其实思考缺少深度，这里的“探究发现”基本属于“一看便知”。学生看到的角是由矩形的边构成的，这两条边本身已显然存在而非学生构造出来的。而且面对特殊的实物，学生未必会去思考“其他地方是否有平面角”、“把角的边移动到其他位置角的大小是否恒定”（图 4），从而展开对一般情形的探究。如此，便也体会不到“在棱上任取一点，作……”，而这又是二面角的平面角概念得以确立的根本之处，也是“数学化”的关键点。因此，学生没有形成意义上的建构！

所以，此处的情境更像是对二面角的一个通俗的解释，它把抽象的知识具体化，让知识简单易懂。但是我们知道，真正有用的知识是抽象的知识、真正有用的方法是一般化的方法，真正有意义的学习是学生思维的真实发生。这个教学里放弃了对抽象性和一般化的追求，所得知识也停留在了实验和经验的层面上。教师固然可以在后续的教学超越这些，但也只能去讲授，这便又回到了上面“知识教学”的窠臼了，此时“情境”的作用极其有限，甚至更像个噱头。

C 现象教学

让学生拿出一张矩形的纸（也可以用书本或笔记本电脑、门等），进行下列活动：

活动1 你能不能把这张纸折成 90° 的角？（说明：这时学生还没有“二面角”的概念，但是我每一次这样要求时他们能够折出“ 90° 的角”——这就是人的直觉，数学符合于直觉。哪怕是最高深的数学，最初也都来源于直觉。）

活动2 你能不能把这张纸折成 60° 的角？（说明：同样能完成。）

活动3 你是怎么确保折成的角就是 90° 或 60° 的？或者你怎样向我证明你折出的角符合要求？（说明：学生会去度量矩形与折痕垂直的那一边被折成角的度数，他们的折痕普遍地与某边垂直，因此他们度量的其实就是二面角的平面角。）

活动4 再折出 120° 、 150° ，可以吗？（说明：这必须去度量其补角，很有困难，但因为实物易于观察和操作，最终还算“顺手”。）

（至此，学生已经对“二面角及其大小”有了真实的感知，现在需要的就是在二面角中生成平面角的概念，从而联结学生的数学现实）

活动5 请把纸撕成不规则的形状，比如树叶形（可以直接使用落叶，图5）。重复上面的活动1-4

说明：这时已经没有现成的、与棱垂直的射线可用，也就是说材料中没有现成的“平面角”。而正是在这个更原始的材料中，学生感知到要度量的是什么角。在他们把三角板“插入”折过的纸片里的时候，就已经真实地“构造”了二面角的平面角。用 90° 、 60° 、 45° 完成真实感知后，再用 120° 、 150° 和 135° 加以强化，前者是可以实测的，后体验到“必须”作出与棱垂直的射线，从而建构很清晰的“平面角”意义。



图5

以下进行严密的数学化，形成概念。

活动6 用实物操作，在树叶形的纸片上把二面角的平面角“制作”出来（说明：两次对折，后一折痕与前一折痕垂直，沿后者剪开。）

二面角教学的关键在于“平面角”意义的建构。学生能够看见二面角，但是二面角的平面角是看不见的。树叶形纸张上那两条与棱垂直的射线，不是“发现”而是“构造”，二面角的平面角不是具体的，无法找到，它是抽象的，是由学生的头脑生成的。在概念抽象意义形成的过程中，矩形纸张、笔记本电脑、书本的纸页这些具体的事物，为学生的概念生成做了具体化理解的铺设，但仅限于此是不够的，需要由特殊到一般，具体到抽象。所以，仅止于图2、3、4的情境设计，无法促使学生对数学问题的深入思考。必须用去除了特殊性、更有抽象意味的材料促进学生的数学建构，以引发对概念本质的深度理解。在图5的树叶形纸张里，学生基于对矩形纸张的研究经验可以自然联想，在数学直觉的指引下“凭空”设计两条与棱垂直的射线，从而引出一般意义上的平面角概念。这就是思维的创造，是意义的自然生成，是真实学习的发生。而且在“生成”的时候，树叶上两条垂线的位置是不固定的，学生存在对“等角”问题的自然疑问，疑问又进一步促进了思考，在它们自行论证、得到“角与位置无关”的结论以后，其成功的喜悦已卓然可见。这样的学习过程，使他们有了探究能力、情感态度的双重体验，这对学生数学素养和全面素质的提升都大有好处。

为便于读者比较，下面选择一个教学案例来进行对比分析。这是一篇发表在一本公开刊物，并被人民大学复印资料转载了的，是一个课堂教学实录的片段，此教学设计曾被多位专家认可。

案例2 二面角及其平面角的教学

师：初中数学中，角是怎么定义的？

生：从平面中的一个点出发，分别朝两个不同方向引出两条射线，则这两条射线和定点组成的图形称为角。

师：好，请大家模仿初中平面几何中角的定义来定义二面角。

生₁：如果我们把角看成是二维平面里的一种概念，类比到三维空间，定点转变为定直线（即棱），引出的两条射线变为该棱引出的两个半平面。

师：很好！确实可以从角的定义类比得到二面角的定义。将角的定义中的每一个元素升级到三维空间中的元素，就构成了空间中的二面角。因此，二面角是一种空间图形，现在我们来观察不同类型的二面角的形态。

（教师展示二面角的具体生活模型，增强对二面角的认识）

师：角是一种平面图形，二面角是空间图形，如何刻画二面角的大小呢？我们身边是否存在二面角模型实例呢？

生₂：教材的书页与书页之间就是二面角的空间模型。

师：对，请大家翻动书页，思考如何度量二面角。

（学生思考、讨论）

生₃：我觉得既然都叫做角，就需要用一个确定的平面角来度量。

师：很好！哪一个角能承担这一重任呢？

（一些学生面露难色，教师提示）

师：平面角的顶点应该落在什么位置？角的两条射线该如何放置，才能合理地刻画这个二面角呢？

（教师引导学生通过操作来破解难点，让每一个学生准备一张纸，对折后就是一个二面角。过棱上一点在两个半平面内尝试各画一条射线，然后观察怎样刻画二面角的平面角。小组讨论后代表发言）

生₄：在棱 l 上取一点 O ，在两个半平面内作两条射线 OA,OB ，使得它们都与棱 l 垂直，我觉得这两条射线组成的角 $\angle AOB$ 可以刻画二面角的大小。

师：点 O 的位置确定吗？能否在棱 l 上取其它的点？

生₅：可以，我在棱 l 上取另一点 O' ，同样在两个半平面内作与棱垂直的两条射线 $O'A, O'B$ ，由等角定理知 $\angle AOB = \angle AO'B$ ，因此这样作出的角只与二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小有关，而与点 O 在在棱 l 上的位置无关。

师：妙！如果过我们将这个称为二面角的平面角，大家有不同意见吗？

生₆：我是这样作的：在棱 l 上任取一点 O ，在两个半平面内作两条射线 OA,OB ，使得它们都与棱 l 夹角为 60° ，这两条射线组成的角 $\angle AOB$ 也是确定的，所以我觉得也可以刻画二面角的大小。

（有一些学生觉得这又道理）

师：确实有道理！哪一种更合适呢？

（学生思考。见没有学生发言，老师引导）

师：请大家把二面角的一个面放在桌面上，另一个半平面绕棱 l 转动，两个半平面重合及两个半平面都在桌面上时，二面角的平面角分别是多少？

（学生动手操作）

生 7: 当两个半平面重合时, 二面角的平面角为 0° ; 两个半平面都在桌面上时, 二面角的平面角为 180° 。此时只有 $OA \perp l, OB \perp l$ 才符合。因此, 当 $OA \perp l, OB \perp l$ 时, $\angle AOB$ 表示二面角的平面角最合适。

这个教学案例当然也是教师用心设计的, 分为三个环节: 第一个环节是由平面几何中的角的概念来类比猜想空间几何中的二面角; 第二个环节是学生合作探究二面角的概念, 但总让人感觉探究过程过于抽象, 似有从定义到定义的自圆其说之感; 第三个环节是对其他学生不同想法的教学引导, 看似在进一步帮助理解形成正确的平面角概念, 但反而让人觉得学生并未真正领会和建构对平面角的认知。本案例从知识教学来说, 可谓是讲授法的典型案例(展示实物模型时有一点情境教学之意), 看似老师在提问、在引导, 实际上并没能启发学生深入思考, 学生只停留在“是”与“不是”的辨认上。这并非是老师的课堂施教能力问题, 而是归因于“知识教学”的天然缺陷。只要选择了知识教学, 则二面角、二面角的平面角的概念便只有老师给出。