

# 异面直线的距离教学

江苏省陶都中等专业学校 潘静

学生在初中已经学习了点到点的距离、点到直线的距离以及两条平行直线之间的距离。但是，异面直线的距离与它们有不同的模式，并不能直接照搬过来。那么，怎样来学习它？学了以后能对学生的认识能力带来怎样的提高呢？

我见到的所有教材，在处理异面直线距离的时候，都是用这样的顺序来介绍的：异面直线-公垂线-公垂线段-距离。其中的每一步都显得很突然，比如突然给出“公垂线”，突然给出“公垂线段”，突然说把“公垂线段的长度”定义为异面直线的距离。所有这些突然，都只能是老师讲出来，学生则作为“任务”去记住和练会。因此，学起来很吃力，学完了也不容易理解。而即使最后他们把求解的方法“练会了”，也还没有完全理解这个概念的意义。

而且这样的学习对后面的线面距离、面面距离的学习毫无可借鉴之处，对前面的点线距离、两平行线间距离也没有加深认识，好像知识增加了一个单独的知识，就像多认识了一个人一样。这种教学方法被目前的所有教材所采用，因此所有教材都没有解决学生对“异面直线距离”概念的理解问题。我认为这种教学是无意义的、机械的教学，投入很多精力却没能产生效果。结果也显现出来了：各国的教学都不约而同地弱化这个知识点，我们国家的高考中已经不考。

按照“异面直线-公垂线-公垂线段-距离”这样的顺序，看似搭了多个台阶让学生逐步走到目的地，实际上每一个台阶、每一个步骤的目的都不为他们所确知。也就是说，经过长途跋涉到了一个地方，他们非但不知所到的是哪里，连自己所走过的路都茫然无知——他们好像是被绑架到了那里而不是雀跃行至。

是不是有更好的方法？有！那就是：回到问题本身——这是现象教学的根本观点。

既然是求距离，首先就要弄清楚“距离是什么”。有了对距离意义的认识，以后的“求法”才具有实在的意义。给行动赋予意义以后，才能为学生所喜闻乐行。为此，我们设计如下的教学过程：

## 案例 异面直线的距离

师：请大家用两只笔代表两条直线，摆出它们在空间的不同位置关系。

生：（分别摆出相交、平行、异面关系）

师：什么叫异面直线？

生：（回顾，回答）

师：我们已经知道，两条异面直线可以形成不同大小的角。那么，除了角以外，还有什么是值得去认识的？

（评析：学生通过摆放不同的异面直线，体会其中的位置关系和数量关系。再请学生交流演示）

……

师：大家都认为异面直线之间是有距离的。那么什么是异面直线之间的距离呢？同桌的两个同学请合作一下，一位摆好一对异面直线，另一位指出哪个东西能代表异面直线间的距离。

（评析：这时学生所摆的异面直线，基本有一条或两条与地面平行，有的干脆把一条放在了桌面上另一条平行于桌面。另一位负责“指认”的同学，会在两条之间划出一条“最近”的线段来。虽然还没有给出定义，但他们凭直觉就能感知到“应该是它”——这个直觉弥足珍贵。数学原本就应该符合人的经验直觉，然而这一重要特征直被我们所忽视。一直以来，我们把逻辑看得太重了而把人的活动经验看得太轻了。）

师：请移动你的直线，把它们之间的距离扩大为原来的两倍。

生：（移动一条，或两条同时移动）

（评析：我们会发现，学生移动直线的方向就是刚才所比划的方向，也就是“公垂线”的方向。而“两倍”则是指把那条“公垂线段”的长度加倍。如果发现移动方向“不对”的，老师可以示范一个“正确”的移动，并问“水平移动一条直线，能够不能把它们之间的距离加倍？”再让刚才“错误”的同学重试一下。至此，他们已经“找到”了异面直线的距离，就差最后的表述了。如果先给学生留下更深刻的印象，可以让他们“再加倍”、“再加 10 厘米”或“再变为原来的三分之一”）

师：请把直线的方向调整一下，使任何一条都不与地面平行。重新考虑上面的问题。

生：（在空间调整两条直线的方向）

（评析：学生通过空间两条“倾斜”的异面直线，感知和指认他们之间的距离，然后再同样地把距离加倍，为的是让他们体会“任意”两条异面直线间的距离。至此，意义已经完全清楚）

师：我们体会了异面直线的距离，还对不同距离进行了辨认，远的近的、歪的斜的都没关系。那么，究竟什么叫异面直线的距离呢？我们是不是需要给一个严格的定义？（师生合作，给出严格定义）

……

练习：正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 5，求出下列异面直线之间的距离：（1） $AB$  与  $B_1C_1$ ，（2） $DD_1$  与  $BC$ 。（答案都是 5）

师：（开启第二阶段）我们用公垂线段的长度定义两条异面直线的距离，那么用直线上其他的点来定义行不行？也就是说，在直线上取另外的点来构成线段，其长度会不会等于刚才所说的公垂线段的长度？

生：（试探，可以作图说明，也可以继续摆放钢笔，在钢笔上找点）

师生：异面直线的距离是两条异面直线上点的距离的最小值。

（评析：这才是“距离”的本质特征，“垂直”并非本质特征。这也是我们所久已忽视的，我们一直把这个非本质特征当作了距离的本质）

师：让我们在回过头去看以前学过的几个距离问题：

（1）两点之间的距离是指直线段的长。有什么特征？两点之间的所有连线中，线段最短（都由学生回答，下同）。

（2）点到直线的距离是指自点向直线所作的垂线段的长。有什么特征？点与直线上所有点的连线段中，垂线段最短。

（3）两条平行直线的距离是指夹在两条直线间的垂线段的长度。有什么特征？连接两条平行线上两点的线段，垂线段最短。

师：我们平时所说的距离是什么意思呢？比如：苏州市和上海市的距离是多少？

生：（可能有下面的回答：半个小时的火车；开车 1 小时；两市相邻，没有距离）

师：刚才大家说的可能指的是两个火车站之间的距离，或者开车的起点和终点的距离。那么，能不能说它们是“两个市之间的距离”呢？两个市不是两个点，而是两个区域。怎么考虑距离呢？

生：（讨论，趋向于一致：苏州与上海邻界，可以说距离为 0。其余的都是某两点之间的距离，不是两市之间的距离）

师：一般地，是不是可以考虑一下“两个点集之间的距离”？比如两个圆及其内部，作为两个点集（图 1），是不是可以考虑它们的距离？

生：（思考，讨论，交流）

师：在两个点集内分别取点，连成线段。这这些线段长度的最小值就叫做这两个点集之间的距离（图 2，点到

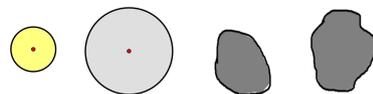


图 1

图 2

为止)。大家一定知道物理上有个“尖端放电”现象，电所走的就是最近距离。

问题 在空中交叉而过的高压电线（如图3），当电势差足够大时就可能击穿空气产生放电现象。如果这种事情发生，将发生在何处？

（评析：在设计高压线路的时候一定要考虑这个因素，并不是没有“尖端”就不放电的。“尖端”只是放电的一个非本质特征，放电的本质特征是“电势差足够大”。）



图3

### 结语

这样的设计，从直观感知开始，先整体性地认识哪个“东西”是“异面直线的距离”，然后又回过头来归结到“点集距离”上，这就把距离的本质特征揭示了出来。其好处是：把以前所学的点点距离、点线距离、两平行线距离以及刚学的异面直线距离整合到一起。“点集距离”是一个更为抽象的概念，其认识功能也大大增强，在以后学习点到面的距离、直线和平面的距离、平行平面之间的距离以及两点之间的球面距离时，这个抽象概念将显示出极大的优越性。

在尚未给出定义的情况下，就让学生说那一个是“异面直线距离”，这种做法是否可以？利用“点集距离”这个抽象的概念，在高中可行吗？我认为不仅是可行的还是必要的。

首先，“点集距离”比“异面直线距离”和“平行线距离”更具直观性。人在生活中接触“两个区域的距离”比接触“两条异面直线的距离”机会更多，感知也更清晰，用前者来理解后两者显得比较便利。探究“区域间的距离”比探究“异面直线的距离”更有趣也更容易。人最基本的感知就是对空间的感知，而对“距离”的感知又是空间感知中最基本的，因此人有欲望去探究它，这就具备了对距离进行抽象的心理基础。

其次，前面所学过的3种距离（点点，点线，平行线），都具有“最小”这个特征，学生已经清楚这一点，把这个特征迁移到“异面直线的距离”上是可以的（教学中学生的反应证实了此设想）。在利用它学习了异面直线的距离以后，又回过头来明确“点集距离”的概念，可谓趁热打铁。一般地，同类的对象见过4个就可以进行归纳了，这是很自然的认知行为。如果学了4个还不归纳，则是思维的慵懒，有违生态学的规律。

再次，此处的抽象只是作一个直观的描述，并不去进行深刻的分析，它唤醒的是人沉睡的记忆，激活的是头脑的想像力。因为没有对“点集距离”做过高的要求，不去操练它的解题方法，因而不加重学习上的负担，反而给他们带来了思想的自由和心灵的愉悦，提高了学习的效率，促进了情感态度价值观的改变（醉翁之意不在酒，在乎山水之间也）。

最后，此处抽象出“点集距离”的概念，不是为了教材也不是为了知识，而是为了给学生示范一个思考的路径，帮助他们学会学习、学会思考，这符合人的可持续发展原则，符合当今的核心素养教育。相反的，如果前面学了3种距离，在学了第4个以后认识水平还不能提高起来，这样的学习就是低效重复的。目前所见的高中教材，没有一套注意到这个问题。数学上学习了那么多的距离，学生对距离的认识却始终没有提高。每一个距离都只有各自的特色定义，而没有有一个抽象的概括。这让我想到了原始民族爱斯基摩人，他们把每一只麋鹿都认识得非常清楚，却没有产生“麋鹿”这个概念，以至每一头麋鹿都有不同的称呼甚至同一只麋鹿在不同季节也有不同的称呼。这种认识是很低下的。中学教材中这种处理还表现在周长、面积、体积等知识上，没有递进只有并列的知识堆积，每一个都是碎片化的知识。这样的知识即使学得很多，对人的认识的提高帮助也十分有限，而负担则增加了很多。“减负”不是少学或不学，而是应该高效率地学。而高效率也不是单靠学生“投入热情、提高兴趣”就可以做到的（不用陷入“人有多大胆地有多大产”的泥沼），这急需老师主导作用的发挥。如果这个时候老师缺位，就是很不应该的。值得一提的是，如果老师有现象教学的理念，他可以在此发挥更大的效力。

有人说，理论科学就是分类的学问，而分类之可以进行是因为有足够抽象的概念，用以

揭示本质特征并概括所需涵盖的个体。“点集距离”就把中学所能学到的所有距离概括在内，揭示了距离的本质又为后续学习准备了条件。同时，它紧密结合人的生活经验，具有经验直观性，因而是符合人性也服务于人性的——这不就是核心素养教育所追求的“为了人的全面发展”么？