# 走出惯性思维的“怪圈”

## 江苏省宜兴丁蜀中等专业学校　　潘静

作者简介：潘静（1984-），女，江苏宜兴，中等职业学校讲师，大学本科，理学学士，主要从事职业学校数学教学研究，在《中学数学教学参考》、《成功》等省级刊物上发表论文。

摘要:在数学教学中，惯性思维能让学生对同类问题的处理“轻车熟路”、“游刃有余”，积极作用毋庸置疑，但也可能产生错误的导向，阻碍新问题的解决，教师应该正确引导学生突破惯性思维的负效应，转知为能，促进学生可持续反展。

Abstract: in the teaching of mathematics, the inertia of thinking can help students on similar problems with "hundreds of times", "easily", a positive role undoubtedly, but may be misleading, solve new problems hinder, teachers should guide students to correct the negative effect of breakthrough thinking, thereby to promote students sustainable. Development.

关键词：惯性思维　　逆向思维　　变式训练

Key words: Inertia thinking, reverse thinking, variant training

惯性思维是由先前的活动而造成的一种对活动的特殊的心理准备状态，或活动的倾向性，是依据长期积累的思维活动规律和经验教训，在反复实践中形成的定型化的思维方式、轨迹、流程、模式。一般分为两种：一种是积极的，有助于分析和解决新问题，具有正面效应；另一种是消极的，容易阻碍学习者理解和探究新的规律，负面效应明显[1]。

数学学习的核心价值在于问题的解决。解数学问题的一般模式是把有待解决的问题化归为曾经解决过的问题，其过程体现了思维的定向性和连续性。惯性思维的不断作用潜移默化地影响着学生解题的心路历程，有时灵活应变，触类旁通，促进问题有效、快捷地解决；有时会滋生消极作用，使思路闭塞，导向歧途，形成思维惰性。[2]本文笔者结合长期的教学实践，阐述解题教学中“扬正避负”的有效策略，正确引导学生走出惯性思维的“怪圈”，为学生的可持续发展奠定基础。

**一、逆向思维觅拓展**

顾名思义，逆向思维也就是反着思考问题，它要求学生从不同的视角、不同的层面、不同的立场去分析思考。很多时候，学生钻进了顺向思维的“死胡同”，似乎到了“山穷水尽”的境地，此时，逆向思维往往能打开“绝处逢生”的神奇通道。下面例说两类逆向思维的经典策略。

（一）喧宾夺主

在一些数学问题中常常含有多个变量，其中有一个变量处于主导地位，我们称之为主元，其他的变量一般视为参变量即参数，类似于一部影片或电视剧里的主角和配角，习惯上我们总是特别关注其中的主角。学生在长期反复的解题训练中已经形成一定的解题套路，解此类题型始终抓住主元不放手。但在某些特定的命题条件下，惯性思维却严重制约了思路的拓展，必须另辟蹊径，此时若能变

更主元，喧宾夺主，往往可以收获意外的惊喜。

案例 1：已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，存在实数 $x_0$，且有 $|x_0|\geq 3$，使得 $f(x_0)=0$，求 $a^2+4b^2$ 的最小值。

分析：此题表面来看，是一元二次方程区间根的分布问题。学生理所当然地看成关于 $x$ 的一元二次方程，依据零点判定定理列出满足对应二次函数在区间 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ 内存在零点的约束条件，即关于 $a$，$b$ 的不等式组。由于情况比较繁杂，学生很难考虑完整。即使所列条件正确，目标式的最小值又将如何处理，学生依然束手无策。倘若喧宾夺主，以 $a$，$2b$ 为主元，把 $x_0$ 看作参数，那么可将方程 $x_0^2+ax_0+b=0$ 改写为 $x_0^2+ax_0+\frac{1}{2}(2b)=0$，再将 $a$ 换成 $x$，$2b$ 换成 $y$，方程变为 $x_0x+\frac{1}{2}y+x_0^2=0$，此时这个方程可视为关于 $x$，$y$ 的二元一次方程，$(a,2b)$ 为它的一组解。从几何意义角度理解目标式 $a^2+4b^2$ 可以看作动直线（$x_0$ 在变化）$x_0x+\frac{1}{2}y+x_0^2=0$ 上一动点 $(a,2b)$ 到原点的距离的平方，其最小值只需考虑原点到直线的距离 $d=\dfrac{|x_0^2|}{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}$（$|x_0|\geq 3$）的最小值，通过两边平方，令 $t=x_0^2+\frac{1}{4}(t\geq\frac{37}{4})$ 进行换元，拆分后转化为函数 $g(t)=t+\frac{1}{16t}-\frac{1}{2}(t\geq\frac{37}{4})$，依据函数单调性即可求出最小值 $\frac{324}{37}$。

构造出关于 $a$，$2b$ 的二元一次方程，巧妙地反客为主，是打破惯性思维僵局，拓展解题新思路的关键，切不可陷入惯性思维的“怪圈”不能自拔，灵活变通，才能无往而不胜。

（二）弃正取反

在数学问题的解答过程中，常见正面入手比较麻烦或情况过多，此时没有必要死磕到底，采用迂回战术，正难则反，大大简化解题的工作量，提高准确率。

案例 2：A、B、C 三位同学参加一家公司的面试，通过的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，求至少一位通过面试的概率。

解析：此题若从正面入手，必须考虑“A 通过 B 通过 C 通过，A 通过 B 通过 C 不通过，A 通过 B 不通过 C 通过，A 不通过 B 通过 C 通过，A 通过 B 不通过 C 不通过，A 不通过 B 不通过 C 通过，A 不通过 B 通过 C 不通过”七种情况概率之和，情况偏多，运算复杂，稍有不慎，难免出错。换种思维角度，弃正取反，只需盯住它的对立事件，即三位同学都不通过的概率来求解，显然只有一种情况，简单明了。

弃正取反，避重就轻，学会合理转化，拓展思路，打破思维常规，提高解题效率。

简而言之，在解题教学中渗透逆向思维的重要策略，有助于促进学生思维的多点发散，提高解题的分析和应变能力，真正进入遇到困难思如泉涌，实践操作游刃有余的思维新境界。

**二、寻根究底溯本源**

数学问题的本源也就是数学教材中隐性的知识以及具有基础性、启发性、衍生性的有价值的知识。很多高考题都与本源性问题有着千丝万缕的关系，是其继承与发展的产物。教师在教学中往往受制于教学进度和知识容量，往往忽视了数学知识的来龙去脉，一味追求一些通性通法的灌输，严重影响了学生对问题背后的基本概念的正确认知和理解，浅尝辄止，华而不实。

案例 4：若函数 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x-2}\,(a\in R)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，求 $a$ 的取值范围。

分析：导数是研究函数单调性有力的武器，由于步骤简单，方法明确，深受教师和学生的偏爱。尤其在高三复习中，很多教师反复向学生强化解题意识：只要遇到关于函数单调性的问题，一般先求导函数，再根据其正负确定单调区间。若条件给出单调区间，求函数式中参变量的取值范围，那么特别注意增区间对应列式为导函数非负恒成立，减区间对应列式为导函数非正恒成立。学生对老师的特别提醒如获至宝，在反复训练中形成了约定熟成的思维惯性，乐此不疲。 比如此题，几乎所有的学生都不加思索地先求出导函数 $f'(x)=\dfrac{-2a+1}{(x-2)^2}$，令 $f'(x)\geq 0$，解得 $a\leq\dfrac{1}{2}$。似乎合情合理，但细心查看会发现，如果把端点值 $\dfrac{1}{2}$ 代回原函数化简得 $f(x)=\dfrac{x-2}{2(x-2)}=\dfrac{1}{2}(x\neq 2)$，是一个常数函数，何来单调性一说。显然，此题的正确结论是 $a<\dfrac{1}{2}$。产生这种错误的根源在于当学生熟记老师强调的解题规则后，严格执行，按部就班，不越雷池一步。许多学生坚信只要是已知单调性求参变量范围的问题，都可以转化为处理导函数恒大于等于零或恒小于等于零的问题，处理方式公式化、机械化。正是受到惯性思维负效应的影响，大部分学生忘记了如何用导数完整、合理地表征单调性，实现丰富知识的关联；忘记了一个函数在指定区间上单调，只需图像呈现连续上升或下降的趋势即各点处的导数恒正或恒负，当然允许存在个别或部分点处的导数为零，但是必须排除导数恒为零的情况。此题的陷阱就在于此，由于学生忽视了知识本源的来龙去脉，断章取义，掐头去尾，因此在知识的运用上实现了负迁移。

“记——练——考”式的高考功利追逐严重背离了育人的本源目的，学生无奈地成为了被动的“知识受体”，在高强度的复习教学中，有意无意地缩减了完整的思维流程，对知识的理解和应用很单一，很机械，很肤浅。长此以往，学生思维断层，理解片面，不利于终身发展的需求。其实，此题若从知识的本源入手，就可以巧妙地避“雷”：方案一，按照函数单调性的原始定义进行证明，步步为营，直逼结论；方案二，分析函数解析式的结构，通过分离常数，即可发现该函数的母版函数——反比例函数，是由其平移所得，这样直接研究反比例函数的图像，即可得到正确结论。殊途同归，本源凸显，教师必须重视知识的价值回归和重加工、再创造的过程性教学，促进学生数学理解和应用层面的有效突破，避免“一叶障目，不见泰山”，真正实现从知识走向智慧。

**三、深度变式促提升**

在函数奇偶性的教学中，教师不断强化判断函数奇偶性的基本步骤：一、判断定义域是否关于原点对称；二、验证 $f(-x)$ 和 $f(x)$ 的关系，若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数。学生反复练习，对此解题技能已形成了惯性思维，条件反射，即使问题情境变化时，也不能具体问题具体分析，依然对解题步骤张冠李戴。

案例 5：已知函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$， $a\in R$，判断函数的奇偶性。

分析：学生观察函数解析式的形式为整式型，对自变量 $x$ 没有任何限制条件，只需验证 $f(-x)$ 和 $f(x)$ 的关系，即可判断奇偶性。

解法： $f(x)$ 的定义域为 $R$，关于原点对称。

$\because f(-x)=(-x)^2+|-x-a|+1=x^2+|x+a|+1$， $f(x)=x^2+|x-a|+1$，

$\therefore f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$ $\therefore f(x)$ 为非奇非偶函数。

笔者统计后，惊人地发现，全班近百分之八十的同学采用这种错误解法，发人深省。大多数同学都牢记判断奇偶性的步骤，按部就班，机械化操作，根本没有关注参数 $a$ 的影响（需要讨论），没有洞悉奇偶性深层次的含义，不能灵活应对发生变化的问题情境，凸显惯性思维在解题技能上的消极作用。

为了让学生避免惯性思维的认知错误，笔者特意设计一个题组变式训练如下：

1. 若函数 $f(x)$ 为定义在区间 $[a,1-2a]$ 上的奇函数，求 $a$ 的值。

2. 若函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数，求 $a$ 的值。

3. 若函数 $f(x)=ae^x-e^{-x}$ 为偶函数，求 $a$ 的值。

4. 若函数 $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$，判断奇偶性。

5. 若函数 $f(x)=\dfrac{\ln(4-x^2)}{|x-3|-3}$，判断奇偶性。

6. 若函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$，判断奇偶性。

7. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,x\ge 0\\-x^2-2x,x<0\end{cases}$，判断奇偶性。

8. 若函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x^2}$，判断奇偶性。

点评：题组中 8 个小题，从判断奇偶性的各个层面实现多点发散，循序渐进。第 1 题考查函数具备奇偶性的大前提——定义域关于原点对称；第 2，3 题考查已知奇偶性求参数的值，提醒学生注意可以用奇偶性定义证明的步骤求解，也可以简化运算用特殊值法求解，但 2 中不能用 $f(0)=0$，避免思维定式的错误，由于定义域中没有零，故只能用 $f(-1)+f(1)=0$ 来求解，3 中用 $f(-1)=f(1)$，兼顾数学思维的缜密性，得出参数 $a$ 的值后需要回代检验；第 4 题意在强调定义域不满足条件，可直接判断为非奇非偶函数，无需验证 $f(-x)$ 和 $f(x)$ 的关系；第 5 题表象带有欺骗性，容易误导，要先根据定义域去掉分母绝对值的干扰，化简后即可明确其为奇函数；第 6 题重点突出既奇又偶函数的形式为 $f(x)=0$，定义域关于原点对称；第 7 题分段函数奇偶性的判断可以根据定义入手，分区间证明；也可以从图像特征直观判断，若图像关于原点对称即为奇函数，若图像关于 $y$ 轴对称即为偶函数，激发学生化数为形，以形助数的数学思维；第 8 题引导学生关注参数的影响，树立分类讨论的解题思想。

变式训练力求变中有序，变中出新，变中求深，要切合学生的最近反展区，要让学生“跳一跳，摘得到”。学生通过题组的洗礼，很快解决了案例 5，具体如下：

解析：$f(x)$ 的定义域为 $R$，关于原点对称。

当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2+|x|+1$，显然 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数；

当 $a\ne 0$ 时，$f(-1)=2+|a+1|$，$f(1)=2+|a-1|$，$f(-1)\ne f(1)$ 且 $f(-1)\ne -f(1)$，所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数。（特别注意判断一个函数没有奇偶性时必须用特殊值的方法，体现了任意性和存在性的对立统一。）

解题教学中引入变式训练，可以有效突破惯性思维负面效应，引发学生一题多变、一题多思，从而达到举一反三，触类旁通的理想效果，让枯燥无趣的解题训练变得灵动、智慧。教师在设计时更要走心，针对课本例题、习题中的典型问题深入分析，提炼常考常新的思想和方法，通过变换题目的条件、结论、形式、

背景，增添一些具有开放性和拓展性的问题元素，这样的变式变得稳，变得新，变得深。知识的本质得以保障，智慧的延伸更加全面，学生在变式中感受矛盾的冲击，体味成功的喜悦，犹如脱缰的野马任意驰骋。若能将变式成为教学的常态，学生的思维将变得更严密，更通透，更灵动。

**四、有效反思谋创新**

“思接千载，视通万里”，这也是数学教学所追求的理想境界。教师的教与学生的学都提倡反思，如何实践，才能收获成功，这是值得深入探究的。学生解题后的反思，不能仅仅停留在对解题过程的常规回顾和简单罗列的肤浅层面，而应深入挖掘、收集解题活动中涉及的思想、方法、经验、规律等，教师亦是如此。

教师要善于引导学生有目的、有方向地反思。解题的具体流程不是反思的重点，而过程中蕴含的思想，涉及的方法，易错的细节，呈现的规律恰恰是需要特别关注的。学生要多思考选择方法的动机，即“为什么会想到这个方法”，这样才能最大程度抵御惯性思维的负面影响，使选择方法更趋于自然、理性，对知识经验的掌握提升到更高的水平。思得深，才能看得远。

案例 6：已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $F$，点 $A(1,4)$，点 $P$ 为抛物线上任意一点，求点 $P$ 到 $y$ 轴的距离与 $|PA|$ 之和的最小值并确定点 $P$ 位置。

案例 7：已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $F$，点 $A(3,4)$，点 $P$ 为抛物线上任意一点，求 $|PF|-|PA|$ 的最大值并确定点 $P$ 位置。

分析：案例 6 考查了抛物线最重要的几何性质——焦半径与点 $P$ 到准线的距离的相互转化，学生对性质的应用得心应手，胸有成竹，也很自然地将该解题方法迁移至案例 7 中，可惜此路不通；同样，解决案例 7 的解题方法也会沿用到案例 6 中，依然没有效果，充分体现了思维惯性的双向负迁移。

反思：案例 6 解题核心在于距离的转化，要求学生深刻领会抛物线的定义，从知识本源入手，适度转化，源于本质，高于本质。具体实施涉及两次转化，首先将点 $P$ 到 $y$ 轴的距离转化为点 $P$ 到准线的距离减去焦准距的一半，然后再将点 $P$ 到准线的距离转化为点 $P$ 到焦点的距离，而 $A$，$F$ 位于抛物线的两侧，从几何意义角度考虑，当且仅当 $A$、$P$、$F$ 三点共线时满足条件，故连结 $AF$ 即可解决；案例 7 由于 $A$，$F$ 位于抛物线的同侧，无需用性质转化，直接连结 $AF$ 与抛物线相交，位于上方的交点即为所求的点 $P$。这两题从形式来看，十分相似，但解题方法不能同日而语，求同存异，方能洞若观火。

学生在反思中甄别，在反思中创新，在反思中成长，逐渐形成对负面惯性思维的免疫力，合理选择方法，提高探究能力。

数学教学是知识的传授，更是智慧的创新，教师要有意识地引导学生形成有效、灵动的惯性思维，在好奇、质疑、探究中拓展新思路，揭示新规律，化知为能，放飞心灵，创新梦想[3]。

参考文献

[1]范良火.数学算数——英国学校数学教育调查委员会报告[R].北京：人民教育出版社，1994：19.

[2]张晓贵.数学课堂教学的社会研究[M].合肥：安徽教育出版社，2007.

[3]李士锜.PME：数学教育心理[M].上海：华东师范大学出版社，2005.