（本文系江苏省教育科学“十三五”规划专项课题《学习进阶理论下的高中数学概念教学研究》（编号：C-c/2016/02/119）阶段性研究成果）

怀“学习进阶”之“猛虎”，嗅“教学设计”之“蔷薇”

江苏省宜兴丁蜀中等专业学校　　潘静

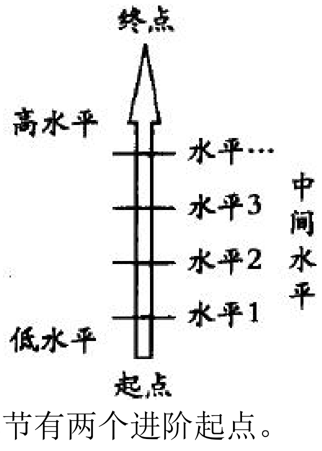
邮编　214221　　　电话　13961521994

摘要：以“基本不等式求最值”一节的教学设计与实践为例，探讨基于学习进阶理论建构循序渐进的序列解决问题的教法，更有效地帮助学生构建核心概念体系，增强学生思维能力的培养，提升数学学科核心素养。

关键词：学习进阶　教学设计　基本不等式

当前，我国的基础教育改革仍在不断深化之中，各种国内外先进教学理念纷纷登台亮相，“学习进阶”也成为科学教育研究的新领域之一。学习进阶是近十年来国际科学教育界的热点研究领域，比较典型的界定是认为“对学生在一个时间跨度内学习和探究某一主题时，依次进阶、逐级深化的思维方式的描述”。

学习进阶的理念认为学习是一种不断积累、发展的过程，学生对知识的理解与掌握不是一蹴而就的，其中必然要历经多个不同层级的中间水平（见右学习进阶的模型图）。学习进阶的起点是指学生已有的经验和知识，终点则多为社会对学生的期望，在两个端点之间存在的多个中间水平则描述了学生对知识的理解是不断发展的。本文以苏教版高中数学必修5《基本不等式求最值》一课相应的实践研究，探讨“学习进阶”理论在高中数学课堂教学中的应用。



一、进阶起点

本节内容安排在基本不等式的证明之后，由此可知本节有两个进阶起点。

进阶起点1：学生在前面所学函数中求最值得方法，如二次函数法、判别式法、单调性法、数形结合法等。

进阶起点2：学生在基本不等式的证明的有关问题中，已经解决了诸如“$x>0$时，$x+\frac{1}{x}\geq 2$”、“$0<x<2$时，$x(2-x)\leq 1$”等简单类型的最值，具备了利用基本不等式求较复杂问题最值的能力。

二、进阶终点

使学生能够运用基本不等式定理来讨论函数的最大值和最小值问题，让学生对基本不等式有更深的体会，同时，对定理中的限制条件也有更深的理解。

三、进阶学习障碍分析

障碍1：不等式$a+b\geq 2\sqrt{ab}$中a,b均为正，而实际应用中a,b有时以代数式

出现，有时正负不定，相当一部分学生则是忽视该条件造成无谓失误。

障碍 2：基本不等式求最值需“和定”或“积定”，学生在初学基本不等式时，对“定值”的理解往往还局限于具体的数或字母，象 x 和 $\frac{1}{x}$ 的积为定值，x 和 $2-x$ 的和为定值等他们也知道，但尚缺乏主动寻找、构造及运用的意识。

障碍 3：基本不等式求最值的最后一道程序须验证两个变量能否“相等”，这一步其实不难，但有些同学做了前两步已觉大功告成，最后一步自动忽略，功亏一篑。

障碍 4：学生缺乏应用“基本不等式求最值”的主动意识和变化能力，只会就题论题，难以通过变式、换元等方法将所解问题转化为“基本不等式”题型求最值。

四、“基本不等式求最值”教学设计

依据进阶理论，设计本课的进阶层级和路径如下：

层级一：就理论题，一以贯之

利用基本不等式求最值时，所用定理简述为：“和定积最大”、“积定和最小”，这是基本不等式求最值的进阶起点，运用这个定理求最值要遵循“一正、二定、三相等”的原则。欲使学生由起点水平进阶为中间水平阶段，完成一定量的基本练习必不可少，在讲评和练习中熟悉常规题型的求解。不能期望一步到位，更不能认为所有学生能自主完成，这个学习路径教师必须精心设计。

例 1　求函数 $y=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 的值域。

先让学生求解，有如下几个层次：

水平 1：$y=x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时 $y_{\min}=2$，故函数值域为 $[2,+\infty)$。

马上有学生指出求解不完整，因 x 正负不定，于是有

水平 2：当 $x>0$ 时，$y\geq 2$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，$(-x)+(\frac{1}{-x})\geq 2\sqrt{(-x)\cdot(\frac{1}{-x})}=2$，故 $y\leq -2$，从而函数值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

水平 3：函数 $y=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 在 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上单调递减，$x=-1$ 时 $y=-2$，$x=1$ 时 $y=2$，从而函数值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

点评：就本例而言，单从基本不等式应用来看水平 2 即为进阶终点，水平 3 的出现遭少数同学的质疑，是不是太繁了。对此教师心中要有数：水平 1 和水平 2 在意料之中，水平 3 则更值得倡导，因为在以后遇到的“双勾函数”问题中，用单调性处理似乎应用更广，它的思维品质更高。从学习进阶视角看问题不是一节课、一个单元的需要，应从一个学年、一个学段，甚至人的一生发展的需要来考虑。

例 2　已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值。

在教师和学生的双边活动中，本例有如下几种水平呈现状态：

水平 1：尝试基本不等式法、函数法，无疾而终，约占 50% 以上。

水平 2：由 $x+2y=1\geq 2\sqrt{2xy}$ 知 $xy\leq\frac{1}{8}$，从而 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}\geq 4\sqrt{2}$，故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$。持这种解法的近 10%。

水平 3：由 $x+2y=1$ 得 $x=1-2y$，故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1-y}{(1-2y)y}$，令 $t=1-y$，由 $x=1-2y>0$ 得 $0<y<\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}<t<1$，

从而 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{t}{(1-t)(2t-1)}=\frac{1}{3-(2t+\frac{1}{t})}\geq\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $2t=\frac{1}{t}$，即 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立。

用该法能坚持到底且正确者只有二、三人而已，且这些同学基本功扎实。

水平 4：因为 $x+2y=1$，所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(x+2y)=1+\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}+2\geq 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$，即 $x=\sqrt{2}y$ 时等号成立。故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 取得最小值 $3+2\sqrt{2}$。

点评：以上四种水平求解参与人数与教师事先估计学生的预期表现基本相符，求解此例的关键是条件中“1”的整体代换，可直接代换，再展开成基本不等式的形式，从而利用基本不等式求出函数的最小值。水平 2 的同学能想到连续两次应用基本不等式，但忽视了相等条件不一这个事实。水平 3 的同学将 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 转化为 y 的函数，再用换元化为基本不等式处理，显示了较强的基本功。水平 4 当然是我们期望的解法，但对刚接触基本不等式的学生来讲难度很大，据课后了解，能用水平 3 和水平 4 求解的学生大都事先看过课本和相关教参内容。

用基本不等式求最值是此阶段的进阶终点，适当的变式训练，可以进一步了解这一内容上学生的进阶维度。对上述例题可形成如下变式：

变式 1：已知 $x>-1$，求 $y=x+\frac{1}{x+1}$ 的最小值。

变式 2：函数 $y=x\sqrt{2-x^2}\,(x>0)$ 的最大值为__________

变式 3：函数 $y=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值为 2 吗？为什么？

变式 4：已知 $x>0$，$y>0$ 且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=2$，求 $x+y$ 的最小值。

变式 5：已知 $x>0$，$y>0$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+2\sqrt{xy}$ 的最小值为____________

众多的变式，不但让学生一看到最值就联想到基本不等式，而且还熟悉了常见题型的表达形式。虽然此时尚未形成基本不等式求最值的知识网络，但众多的题型，单一的方法，不免让学生有“一招鲜，吃遍天”的兴奋，部分学生更生发了“独上高楼，望尽天涯路”的感受。

从上可知解题的第一层级就是“解”，就是想尽各种办法用所学定理、性质解决当前的问题。这一层级的学习基本上是就理论题，方法较为单一，主要是用摹仿加勤奋推动学习进步，该层级学生往往只能处于中游水平，学习辛苦，但进步不大。

层级二：寻隐挖潜，化繁为简

在学习进阶所追踪的发展路径上存在多个相互关联的中间步骤（成就水平），它们反映了学生思维发展过程的普遍阶段。所谓关联结构水平是指，学生对于问题有了整体的把握并能独立地解决问题。能够将多个事件联系起来，根据题型特征，灵活寻找应用基本不等式的条件，综合相关知识解决较为复杂的问题，并形成解决此类问题的知识网络。

在应用基本不等式求最值时，有些问题的定值条件往往被刻意隐藏，初看好像用不上基本不等式，有的则是随着解题的展开出现在解题过程中。因此解题时，应充分挖掘题设条件，并时时注意解题过程中是否冒出定值的苗头，联想基本不等式对应题型灵活求解。

例 3　求函数 $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}(x\neq\dfrac{k\pi}{2}，k\in Z)$ 的值域。

从题面上看无任何条件可用，与此同时也给了学生自由发挥的空间，经学生思考探讨有如下解法：

水平 1：由 $\sin^2 x>0,\cos^2 x>0$ 知，

$y=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2 x\cos^2 x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{|\sin x\cos x|}=\dfrac{4\sqrt{2}}{|\sin 2x|}\geq 4\sqrt{2}$，故函数的值域为 $[4\sqrt{2},+\infty)$。

水平 2：$y=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}$，令 $\sin^2 x=t\in(0,1)$，则 $y=\dfrac{1+t}{t(1-t)}$，即 $yt^2+(1-y)t+1=0$，由题意，

$\Delta=(1-y)^2-4y\ge 0$，解之得 $y\le 3-2\sqrt{2}$ 或 $y\ge 3+2\sqrt{2}$，故所求值域为 $(-\infty,3-2\sqrt{2}]\cup[3+2\sqrt{2},+\infty)$。

水平 3：$y=\dfrac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}$，令 $1+\sin^2 x=t\in(1,2)$，

则 $y=\dfrac{t}{-t^2+3t-2}=\dfrac{1}{3-(t+\dfrac{2}{t})}\ge\dfrac{1}{3-2\sqrt{t\cdot\dfrac{2}{t}}}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$，故所求值域为 $[3+2\sqrt{2},+\infty)$。

水平 4：由 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 知，

$y=(\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x})(\sin^2 x+\cos^2 x)=3+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\dfrac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}\ge 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\cos^2 x=\sqrt{2}\sin^2 x$ 时等号成立，故所求值域为 $[3+2\sqrt{2},+\infty)$。

点评：该例隐含着“和定” $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，只有水平 4 才发现并获得简解。水平 1 想到了用基本不等式求解，却没有考虑这两项之积并非定值；水平 2 和水平 3 没有发现隐含着“和定” $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，转化为分式用函数方法处理，这种思路值得肯定，说明这些同学把函数视作“工具”已在行动中。但水平 2 的处理显得毛糙，$\Delta\ge 0$ 只是表示方程有实根但未必有根在 $(0,1)$ 内；水平 3 开始时没有看出隐含的“和定”，但在转化后发现了分母中的“和定”并及时应用，说明对基本不等式的掌握是较为熟练的。四个水平的求解，描述了学生在解同一题时的不同思考方式。尽管水平 4 是我们这节课所需要的最优解，但并不能说水平 4 的思维层级最高、能力最强。事实上，水平 2 和水平 3 所用的函数法是处理值域问题最常用的“通法”，有什么不好？学习进阶并非要求每一名学生都遵循同一认知进程，不同的学生可以用不同的思维路径抵达终点。通过问题的求解过程让学生学会和掌握寻隐挖潜、化繁为简，才是进阶终点。当然其找寻过程往往充满艰辛，但一旦发现隐匿其中的“和定或积定”，后续过程又极为简捷明快，让人顿有“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”的感悟。

上述过程告诉我们，解题的第二层级是“思”，其特征是刻苦钻研推动学习进步，在钻研中提升数学能力。毫无疑问，这一境界的学生能取得良好的学习成绩，在班上往往处于中上水平。

层级三：回归课本，触类旁通

学习进阶最后阶段要评测各水平的预期表现，主要表现在学生不仅有了对问题的整体把握，而且还能对问题进行抽象概括，使之适用于新的问题情境。能将知识抽象、扩展后进行应用。基本目标是能够解决较为综合或复杂的问题，解题时具有创新的解题思想或解题方法。

例 4　设x，y为正实数，$a=\sqrt{x^2+xy+y^2}$，$b=p\sqrt{xy}$，$c=x+y$。对任意正实数x，y，试探索当存在以a，b，c为三边长的三角形时p的取值范围。

解析：因为$a<c$，所以若a，b，c构成三角形，只需$\begin{cases}a+c>b\\c-a<b\end{cases}$，

即$\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}>p\sqrt{xy}\\x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}<p\sqrt{xy}\end{cases}$。两边除以$\sqrt{xy}$，令$\dfrac{y}{x}=t$，得$\begin{cases}f(t)>p\\g(t)<p\end{cases}$，

这里$f(t)=\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}$，

$$g(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}=\frac{1}{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}},$$

由于$f(t)=\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}\geq 2+\sqrt{2+1}=2+\sqrt{3}$，所以$g(t)\leq 2-\sqrt{3}$，当且仅当$t=1$时，$f(t)$取最小值$2+\sqrt{3}$，$g(t)$取最大值$2-\sqrt{3}$，所以当$p\in(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$时，以$a$，$b$，$c$为三边的三角形总存在。

点评：若a，b，c构成三角形，只需$\begin{cases}a+c>b\\c-a<b\end{cases}$，这一条件的转化是解题的难点，也是解题的关键所在，因此，在解题时要能提取条件中的最有效信息，并能灵活应用。令$\dfrac{y}{x}=t$，更是此题的一个新的突破，将问题归结为求函数最小值问题，体现了换元和化归的重要功能。这题从题面看与基本不等式不搭界，通过换元、转化，化归为可以用基本不等式求最值的题型，过程简捷，回味无穷，颇具“众里寻他千百度，蓦然回首苏，那人却在灯火阑珊处”的意境。

解题的第三层级是“归”，这一层级的学生把学习当成一件有意义的事。看书时常想这些知识可应用在何处，做题时常思这些问题和书本的哪些基础知识有联系。他们在学习上有着上下求索的态势，力争“打通”书本知识和习题之间的关系。

基于学习进阶理论展开教学的三个层次，契合着学生数学思维层次的三次飞跃：层次一侧重于思维的专一性，让学生紧扣所学知识就理解题，通过教师预设打通常规题的求解思路；层次二立足于思维的深刻性，跳出就理解题的窠臼，聚焦解题的核心环节，在优化解法中形成解题策略构建解题模型；层次三则关注思维的广阔性，在问题“源与流”的探寻中实现触类旁通，在命题脉络的构建中趋近“一览众山小”的通透。

这节关于“基本不等式求最值”的教学设计，基于进阶分层理论设计了学

生分层学习的路径，分析了学生在学习中的障碍，按“直接应用、变化应用、发散应用”三个层级设置具体学习内容。注重科学思维的方法，从易到难，从间到繁，符合学生的认知规律。学习进阶的“阶”代表了学生不同的思考方式，而不是简单地是否获得了某个知识，学习进阶关注的是学生怎样思考（甚至更关注学生的“错误思考”)。教师应从认知科学与教学论出发，对于所教主题的教学内容进行认知心理分析，通过实证研究、即时评价、修订目标，我们要随时了解学生对某个具体问题的认知水平，知道了什么？理解了什么？可以做到什么程度？从这些有用信息中制定教学目标，设计合适的教学路径，让学生由起点水平逐渐发展为具体良好科学素养的理解水平，进一步通过评测并结合预期表现，让学生顺次抵达学习进阶中相互关联的多个成就水平，争取更多地学生进阶终点水平。需要注意的是，学习进阶并非是一种自发的发展过程，我们应精心设计最佳的教学序列，以促进这种进阶的发生。

参考文献：

[1]姚建欣，郭玉英．为学生认知发展建模：学习进阶十年研究回顾及展望[J]．教育学报，2014，(05)：35-42．

[2]翟小铭，郭玉英，李敏．构建学习进阶：本质问题与教学实践策略[J]．教育科学，2015，(02)：47-51．

[3]王静，胡典顺．学习进阶在数学教学中的应用[J]．教学与管理，2016，(24)：82-85．