

(本文系江苏省教育科学“十三五”规划专项课题《学习进阶理论下的高中数学概念教学研究》(编号: G-c/2016/02/119) 阶段性研究成果)

关键能力高立意，通性通法硬道理
——学习进阶视域下 2019 年江苏高考数学卷评析

江苏省陶都中等专业学校(丁蜀校区) 潘静

邮编 214221 电话 13961521994

摘要: 2019 年江苏高考稳中渐变, 适度创新, 承接立德树人的育人目标, 服务高校选拔人才的需要。能力立意, 立足基础的高考试题呼唤教学回归教材, 回归本质, 回归学生, 揭示培养学生的思维素养, 提升学生的关键能力才是数学育人的本质追求。

关键词: 通性通法 学习进阶 关键能力

2019 年江苏高考在社会各界的众说纷纭中落下帷幕, 就难易而言, 见仁见智。综观高考试题, 笔者的总体感受为: 试题亲和显平稳, 适度创新助区分。多元表征引思辨, 思维拔节自然成。显然, 整卷有效落实了立德树人, 课程育人的宏观目标, 也为高校选拔人才提供了实证性依据, 命题设计遵循《普通高中数学课程标准(试验)》, 依据《江苏省 2019 高考考试说明》(以下简称《考试说明》), 全方位、多角度地考查了高中数学的主干知识和基本思想方法, 突出了创新能力和应用意识的要求, 加强对不同层次学生的数学关键能力有效检测和诊断, 进而为后续的高三教学决策提供精准导向。下面笔者从通性通法的视角解读 2019 年江苏高考数学试题, 借以阐明优效复习的策略和数学关键能力进阶培养的途径。

一、何谓“通性通法”

所谓“通性通法”, 是指具有规律性和普适性的常规解题模式以及常用的数学思想方法。由于“通性通法”是学生思维素养的根基, 也是后续可持续发展原动力, 因此, 新课标提出: “注重通性通法, 淡化特殊技巧”, 《考试说明》也明确要求: “突出数学基本知识、基本技能、基本思想方法的考查”, 这也充分体现高考对通性通法考查的重视。

二、通性通法的考情分析

1. 基本知识的考查

2019 年江苏高考数学试题考查的知识点分布如下:

表 1 填空题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
集合	复数	算法	二次函数	统计	概率	双曲线	数列	立体几何	基本不等式	导数	平面向量	三角函数	函数零点

表 2 解答题

15	16	17	18	19	20
三角函数	立体几何	圆锥曲线	应用题	导数	数列

表 1 呈现高中阶段基础知识的全覆盖, 分层次考查学生的逻辑思维能力、运

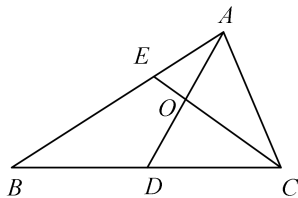
算能力、空间想象能力和创新能力。试题以知识为载体，坚持能力立意，素养导向。从学习进阶理论的视角分析，数学关键能力可分为三个层级：层级一，初步形成；层级二，经验积累；层级三，系统整合。通常情况下，1-10 题考查学生能在具体、单一的知识单元中理解陈述性知识（如数学概念、数学原理等），对于程序性知识（如数学技能等）能模仿操作，能使用本单元的知识、规则和方法解决简单的数学问题并进行简单的数学符号化表达，属于能力层级一；11, 12 题考查学生能在具体、多个知识单元中，体会不同单元内容之间的内在联系，体会程序性知识之间的共性，体会数学思想方法的价值和意义，能用已掌握的知识、规则和方法解决比较复杂的数学问题并能进行规范的数学符号化表达，属于能力层级二；13, 14 题考查学生能在抽象、复杂的新情境中，综合运用已有的知识，有意识地、主动地、灵活选择和熟练运用数学思想方法进行探究，并能用数学符号语言清晰、准确地表达，属于能力层级三。今年的试题 13, 14 一改“面目狰狞”的旧貌，取而代之的是“春风拂面，亲切温和”的三角函数和分段函数题，而试题 12 却“异军突起”，能力要求充分彰显综合性和灵活性，没有深厚的运算功底和灵活的转化意识是很难得到正确的结果的。

表 2 呈现江苏高考的六大经典题型，凸显了高中知识体系中最核心的六个板块。其中三角函数、立体几何的难度与往年持平，圆锥曲线一直让学生“望而生畏”，复杂的运算量成为学生“过不去的坎”，而今年的圆锥曲线依然前置应用题，与 2018 年高考解析几何题类似，直线、圆、椭圆齐聚一堂，上演了“桃园三结义”的戏码，演绎“思维故事”，其问题(1)涉及椭圆的定义、焦点、两点间的距离、椭圆方程等重点知识，在静态的条件下求椭圆的标准方程；问题(2)涉及垂直、共线、共点、对称等重点知识，侧重考查学生对知识的综合运用能力。基于 SOLO 分类理论对试题的能力层级进行评价：问题(1)处于单点结构和多点结构，要求学生能联系单一事件，锁定一个线索直奔结论，或者能联结多个孤立事件，但尚未构成问题的知识网络；问题(2)处于关联结构，要求学生能依托某个事件联想迁移，并能将多个事件联系起来。此题解法较常规，运算量适中，只需思路清晰，定可迎刃而解。作为压轴题之一的第 19 题，一改以往的“繁、难、巧”之姿，取而代之的是“灵、易、活”之态，背景亲切，入口较宽，只需掌握此类问题的通法定可“跳一跳，摘得到”。依据 SOLO 分类理论评价此题，问题(1)处于单点结构，问题(2)处于多点结构，问题(3)处于关联拓展结构，显然遵循思维层级的逐步进阶，关注学生的认知差异，具有较强的区分和选拔功能，有效落实了让不同层次的学生得到不同程度的发展这一课程目标。

2. 基本方法的考查

2019 年江苏高考试题处处体现人文关怀，以人为本，尊重差异。问题背景熟悉，问题表征明确，问题梯度合理，学生只需立足基本方法和基本思想，通过自身努力，一定能获得成功的体验和乐趣。具体而言：填空 1 到 9 题及 15、16 题只需运用基本概念、基本定理即可解决，其他题目依据基本方法、基本思想也不难解决，比如题 10，利用函数解析式设出点的坐标，依据点到直线的距离公式、基本不等式求出最值，再如向量题 12，众多学生口中的“棘手题”，其实用最朴素的“基向量”思想，将相关向量选取合适的基底向量进行分解表示即可轻松解决，当然采用“坐标化”的思想也是常规思维。作为填空压轴题 14，也是平时模拟训练中的“常客”，只需利用函数性质，作出两个函数的图象，数形结合，以形助数，准确作答并非难事。显而易见，命题着眼于基本方法和基本思想的考查，全卷彰显学生思维的自然流畅。以下选取典型问题加以阐释。

问题 1 (2019 年江苏高考卷第 12 题) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE=2EA$, AD 与 CE 交于 O , 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$, 则 $\frac{AB}{AC}$ 的值是 _____.



分析: 本题的命题风格注重综合性和关联性, 涉及的知识都是学生非常熟悉且必须掌握的, 比如向量共线定理、平面向量基本定理、数量积的表示、平面几何背景等, 考查学生的多元表征能力和转化化归能力。此题入口较宽, 解法多样, 思维自然, 运算适度, 具有较高的区分度, 也比较契合学习进阶理论所提倡的“尊重学生的认知差异, 让不同的学生获得不同的思维进阶”。

视角 1 基底搭桥, 通法为上

联系条件和目标, 结合图形特点, 此题的突破口在于确定点 O 的位置, 显然要抓住 A, O, D 和 E, O, C 两个方向的三点共线即可解决, 然后用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 作为基底表示其他向量, 问题可解。这样的思维逻辑符合学生的最近发展区, 处理方法也很常规, 只要注意运算细节, 容易得出结果。

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

设 $\overrightarrow{AO} = 2\lambda\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$, 由 $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AE}$, 得 $\overrightarrow{AO} = 3\lambda\overrightarrow{AE} + \lambda\overrightarrow{AC}$, 又 E, O, C 三点共线, 所以 $3\lambda + \lambda = 1$, 即 $\lambda = \frac{1}{4}$, 故 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ 。此时,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}^2 = 0$$

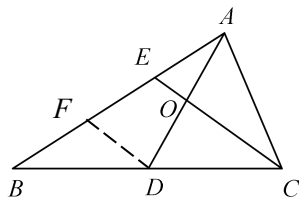
故 $\overrightarrow{AB}^2 = 3\overrightarrow{AC}^2$, 即 $\frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$ 。

视角 2 立足平凡, 举重若轻

若能关注点 D , 点 E 的特殊位置, 联系初中平面几何中作平行线构造比例线段的常用策略, 那么运算可以进一步简化。可见, 激活学生原有的经验模块, 回溯问题的几何本质, 利于思维路径的优化。

过点 D 作 $DF \parallel CE$ 交 AB 于点 F 。在 $\triangle BEC$ 中, D 为 BC 中点, $DF \parallel CE$, 所以 F 为 BE 中点, 又 $BE = 2EA$, 所以 E 为 AF 中点。在 $\triangle ADF$ 中, $EO \parallel DF$, E 为 AF 中点, 所以 O 为 AD 中点。因此,

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$



$$\text{所以 } 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ 因为 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}, \text{ 所以}$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}^2 = 0, \text{ 即 } \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}.$$

视角 3 等价转化, 积淀模型

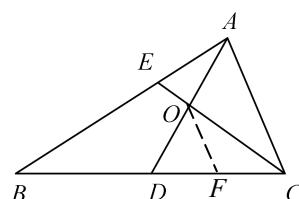
数学解题从本质而言就是不断地转化与化归, 遇到新的问题情境, 要善于捕捉条件与结论中的提示信息, 联系已有的经验模型和方法模型, 有效适配和转化, 形成清晰顺畅的思维程式, 并自觉固化, 适时迁移。

由视角 2 可知, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, 同理可知, $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EC}$, 取 CD 中点 F 。

由极化恒等式可得, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{CD}^2$,

$$6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC} = 8\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} = 8\overrightarrow{OF}^2 - 8\overrightarrow{CF}^2 = 2\overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{CD}^2,$$

由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$, 得 $AD^2 + CD^2 = 2AC^2$, 由中线

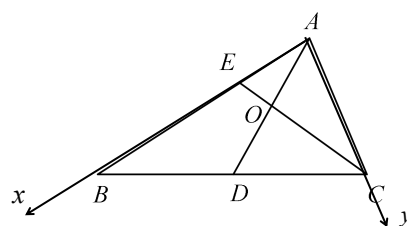


定理可得, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2) = 4AC^2$,

$$\text{即 } \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}.$$

视角 4 特殊建系, 以简驭繁

作为填空题, 在不追求解题过程十分严谨的前提下, 特殊化处理往往可以“出奇制胜”。当然, 特殊化并非任性使用, 而是有迹可循的。从此题的结论分析, 所求结果为比值, 说明与 AB , AC 的具体长度无关, 进而合情推理可知与 $\triangle ABC$ 的形状无关, 这样特殊化处理就显得有理有据。



不妨取 $\angle ABC = 90^\circ$, 并建系如图。设 $E(a, 0)$, $C(0, b)$, 则 $D(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2})$ 。由

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$, 可得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$, 即 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$, 所以

$$(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}) \cdot (-a, b) = -\frac{3}{2}a^2 + \frac{b^2}{2} = 0, \text{ 因此 } b = \sqrt{3}a, \text{ 从而 } \frac{AB}{AC} = \frac{3a}{b} = \sqrt{3}.$$

当然, 建系方式不拘一格, 比如以 B 为原点, BC 为 x 轴正半轴建系, 也可以以 E 为原点, EC 为 x 轴正半轴建系, 甚至可以设 $AB \perp EC$, 这样即可以 EC , EA 为 x 轴, y 轴建系。是否可以求得正确结果, 留待读者自己验证。

点评: 此题常规中蕴含创新, 通法中不失变化。考查内容指向向量中的基础知识和基本思想方法, 命题背景也是历年模拟和高考试题中经常出现的, 给人以“似曾相识燕归来”之感。由于此题解法多样, 内涵丰富, 因此能有效区分学生

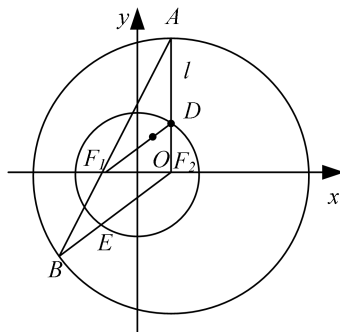
的逻辑推理能力、运算能力和创新能力，也将转化与化归思想根植于学生的思维逻辑之中，完全吻合深化普通高中课程改革的方向。一言蔽之，本题能力立意精心，育人价值高远。

问题2 (2019年江苏高考卷第17题)如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆

$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$.

过 F_2 作 x 轴的垂线 l ，在 x 轴上方， l 与圆

$F_2: (x-1)^2 + y^2 = 4a^2$ 交于点 A ，与椭圆 C 交于点 D ，



连结 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B ，连结 BF_2 交椭圆 C 于点 E ，连结 DF_1 ，已知 $DF_1 = \frac{5}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 求点 E 的坐标.

分析：解析几何历来是高考的重点，考查学生的运算能力一直是学生的“软肋”，而今年的圆锥曲线命题立意在于控制运算，凸显思辨。试题涉及直线方程、圆方程，直线与圆、直线与椭圆的位置关系，椭圆方程、椭圆的几何性质等基础知识，综合考查分析问题和运算求解的能力。值得一提，本题蕴含椭圆的一种对称美，也可以用椭圆的对称性简化运算，引导学生追溯数学本质和品味数学之美。

解析：(1) 因为 $DF_2 \perp x$ 轴，所以 $\triangle DF_1F_2$ 是直角三角形，由焦点 $F_1(-1, 0)$ ，

$F_2(1, 0)$ 知 $F_1F_2 = 2c = 2$ ，因为 $DF_1 = \frac{5}{2}$ ，所以 $DF_2 = \frac{3}{2}$ ，即 $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$ ，又

$a^2 - b^2 = c^2 = 1$ ，所以 $a^2 = 4$ ， $b^2 = 3$ ，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

这样处理的依据为 DF_2 的几何特征是通径的一半，其实也可从椭圆的定义入手，思路也很自然。

依题意得 $b^2 = a^2 - 1$ ，因为 $DF_2 = 2a - DF_1 = 2a - \frac{5}{2}$ ，所以 $D(1, 2a - \frac{5}{2})$ ，将其

代入椭圆方程 $\frac{1}{a^2} + \frac{(2a - \frac{5}{2})^2}{a^2 - 1} = 1$ ，解得 $a = 2$ 。所以，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 标准答案和学生使用的方法都是联立直线与圆方程，联立直线与椭圆方程解交点，这是解析几何中最朴实也是最重要的思想和方法，指向知识体系的本源与核心。

圆 F_2 的方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 16$ ，点 A 的坐标为 $A(1, 4)$ 。直线 AF_1 的方程为

$$y = 2(x+1), \text{ 联立 } \begin{cases} y = 2(x+1) \\ (x-1)^2 + y^2 = 16 \end{cases}, \text{ 得 } (x-1)(5x+11) = 0, \text{ 所以 } x_B = -\frac{11}{5},$$

$$y_B = 2(x_B + 1) = -\frac{12}{5}, \text{ 直线 } BF_2 \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{4}(x-1). \text{ 联立 } \begin{cases} y = \frac{3}{4}(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得}$$

$$(7x-13)(x+1) = 0, \text{ 因为点 } E \text{ 在 } F_2 \text{ 左边, 所以 } x_E < 1, \text{ 所以 } x_E = -1,$$

$$y_E = \frac{3}{4}(x_E - 1) = -\frac{3}{2}, \text{ 故 } E(-1, -\frac{3}{2}).$$

倘若能关注圆 F_2 半径为 $2a$, 椭圆的定义中也有 $2a$, 这绝非偶然, 由此产生结构性联想, 理性数量关系, 一种轻巧的解法应运而生。

由 $DF_1 + DF_2 = 2a = AD + DF_2$ 得 $DF_1 = AD$, 所以 $\angle DF_1A = \angle DAF_1$, 又

$F_2A = F_2B$, 所以 $\angle F_2BF_1 = \angle F_2AF_1$, 因此 $\angle AF_1D = \angle ABF_2$, 从而 $F_1D \parallel F_2E$, 由

椭圆对称性可知, E 与 D 关于原点对称, 故 $E(-1, -\frac{3}{2})$ 。

点评: 对于本题, 颠覆了我们对解析几何题“繁、难、怪”的惯性认知, 考查内容简朴、明晰, 充分彰显解析几何的本质特征, 坐标与方程在直线、圆、椭圆相互联系中应用广泛, 符合江苏考试说明中 B 级、C 级考点要求。椭圆的对称性在江苏高考中“频频亮相”, 值得我们关注, 在本题中, 若能透析问题的几何背景, 那么妙法可成, 简中蕴道。

三、教学启示

高考虽然已经谢幕, 但留个我们的思考是长远的。对高考试题理性分析, 有助于矫正和优化后续的教学决策。从考题之变、复习之失、学生之惑反思教学实践, 务必从精准、夯实、激活等方面提升教学效能, 促进学生数学核心素养的可持续发展。

1. 根植教材, 夯基固本

江苏高考秉持立足教材, 立足通性通法的命题理念, 高考试题的命题背景并非无本之木、无源之水, 题源大多来自教材中的概念、公式、定理、例题、习题等, 只不过经过一些改编或多次复合而已, 正所谓“问渠那得清如许, 唯有源头活水来”。因而, 教师在平时的概念教学中, 可依据学习进阶理论实施“慢教学”, 借助数学史让学生体会概念发现、发展和形成的过程, 对概念的内涵和外延深度理解, 让学生在探源溯流中感悟数学文化之美。在复习教学中, 探究高考题源的精彩, 回溯数学问题的本质, 积淀数学思想方法是摆脱题海, 优效学习的有力武器。教师必须关注学生的认知基础和认知障碍, 为学生的思维进阶设计合适的路径, 帮助学生从低层次思维水平向高阶思维跃迁搭建“脚手架”, 逐步提高发现和提出问题、分析和解决问题的能力。

2. 强化通法, 释疑驱难

高考命题强调通性通法，即解决某类问题的基本思想方法，这是学生学习数学的“童子功”，而一些所谓“秒杀”的技巧，不过“花拳绣腿”而已，不足道哉。高三复习中，在解题中巩固知识，提炼思想方法，形成迁移和创新的自觉，这才是优效复习的应有之义。在此过程中，特别要注重思想的引领和方法的设计：可以通过结构化设问引发学生的深度思考，如“解决这个问题需要什么？不需要什么？怎样转化？还有类似的解题经验吗？”等；题型设计要多角度、多层次，让学生一题多变、一题多解，进而多题一解，力求“做一题，会一类，通一片”，举一反三，触类旁通。教师意识地唤醒和激活学生的原有认知，不断同化和顺应新的经验和方法，逐渐内化和积淀，进而形成灵活应用，适度创新的自觉意识。

3. 变中凝思，自我完善

近年来的高考，更多倾向于考查学生的数学关键能力，“多思精算”已成为当前高考的“时尚”，这也向我们教师传递重视能力培养的信号。美国著名哲学家、教育家杜威认为，在人的各种思维形式中，最好的思维是反省思维。著名数学教育波利亚曾说：“如果没有了反思，他们就错过了解题的一次重要而有效益的方面。”反思是一种学习，也是一种能力。通过对解决问题的反思，完善知识结构，总结经验教训，优化思维品质，提升关键能力。教师要善于“课堂留白”，从而引导学生“反思留痕”，具体而言：反思解题思路的形成，促进思维的深刻性，提升元认知水平；反思解题方法的多元化，培养思维的灵活性，形成理性选择的意识；反思问题的变式和引申，促进思维的发散性和创造性，强化应用意识和创新能力；反思错解的成因，提高思维的批判性，为优化思维决策提供诊断依据。诚然，师生合力才能推动“解后反思”的思维活动，才能发挥其应有的意义和价值，教师提供一条获取课堂教学情况反馈的途径，学生增加一次再学习、再提升、再创造的机会。

参考文献

- [1]教育部考试中心. 高考数学测量理论与实践[M]. 北京：高等教育出版社，2005.
- [2]翟小铭，郭玉英，李敏. 构建学习进阶：本质问题与教学实践策略[J]. 教育科学，2015，(02)：47-5

